Pubblicazioni
dell'Istituto Nazionale di Geofisica del Consiglio Nazionale delle Ricerche
diretto dal prof. Antonino Lo Surdo

N. 10

ENRICO MEDI

Ricerche di cariche elettriche nell'atmosfera

ROMA
ANNO MCMXXXIX - XVII

ESTRATTO DA "LA RICERCA SCIENTIFICA,,
ANNO X - N. 3 (MARZO 1939 - XVII) - Pag. 124

ROMA, 1939-XVII - TIPOGRAFIA TERME - VIA PIETRO STERBINI, 6.

Riassunto: Viene esposto un metodo mediante il quale è possibile determinare, con semplici costruzioni grafiche, la posizione di una carica elettrica puntiforme presente nell'atmosfera, conoscendo per quattro stazioni, il campo elettrico ad essa dovuto.

Nei fenomeni di elettricità atmosferica, specialmente in condizioni temporalesche, si verifica il caso che una carica elettrica presente nell'atmosfera abbia valore tale da perturbare il campo alla superficie del suolo entro una regione notevolmente estesa. Ha molta importanza poter stabilire la posizione e il valore di tale carica ad un certo istante e in tempi successivi per studiarne il comportamento.

Si espone nella presente nota un metodo che risolve il problema servendosi dei valori del campo elettrico alla superficie del suolo forniti da quattro stazioni.

La teoria delle immagini elettriche permette di calcolare in ogni punto di un piano conduttore indefinito il campo dovuto all'azione di una carica puntiforme. E' possibile viceversa stabilire il valore di questa carica e la sua posizione se si conosce il campo ad essa dovuto in diversi punti del piano.

Essendo le incognite in numero di quattro (le tre coordinate spaziali x_0 y_0 z_0 che individuano il punto P_0 e la carica Q), quattro devono essere i punti per i quali è dato il valore del campo e son date le coordinate rispettive sul piano.

Siano i punti P_1 P_2 P_3 P_4 di coordinate x_1 y_1 , x_2 y_2 , x_3 y_3 , x_4 y_4 .

L'espressione generale del valore del campo è data da

$$E = \frac{2\,Q\,z_0}{r^3}$$

ove Q è il valore della carica, r la distanza di questa dal punto considerato, z_0 l'altezza sul piano.

Si ottengono permutando gli indici quattro equazioni (i varia da 1 a 4).

$$E_i = \frac{2\,Q\,z_0}{r^3_i} = \frac{2\,Q\,z_0}{\left(\sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + (z_i - z_0)^2}\,\right)^3}$$

La risoluzione di questo sistema di equazioni dal punto di vista analitico è piuttosto complessa.

Il metodo quì esposto riduce la soluzione a semplici costruzioni grafiche eseguibili con la riga e col compasso.

Per facilitarne la comprensione esponiamo prima il metodo applicato al caso particolare che tre punti e la carica si trovino in un medesimo piano verticale. (Vedi fig. 1).

Sull'asse delle ascisse siano i tre punti P_1 P_2 P_3 di ascisse x_1 , x_2 , x_3 , la carica Q sia nel punto P_0 di coordinate x_0 z_0 .

Il campo nel punto P_1 è

$$E_1 = \frac{2\,Q\,z_0}{r_1^3}$$

nel punto P_2

$$E_2 = \frac{2\,Q\,z_0}{r_2^3}$$

Dividiamo membro a membro le due equazioni

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{r_2^3}{r_1^3}$$

$$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt[3]{\frac{E_1}{E_2}} = k' \qquad \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = \left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{\frac{2}{3}} = k'^2 = k$$

Noto il rapporto k si determina il noto luogo geometrico dei punti tali che il rapporto delle loro distanze da P_1 e da P_2 è costante ed eguale a

$$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{k}$$

A questo luogo deve appartenere il punto cercato P_0.

Scriviamo perciò

$$\frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{(x - x_2)^2 + z^2}{(x - x_1)^2 + z^2} = k$$

sviluppando e ordinando

$$x^2 + z^2 - 2\,\frac{k\,x_1 - x_2}{k - 1}\,x + \frac{k\,x_1^2 - x_2^2}{k - 1} = 0$$

Questa equazione evidentemente rappresenta una circonferenza sul piano $x\ z$.

Il centro di tale circonferenza ha come coordinate $z = o$, essendo simmetrica rispetto all'asse delle x, e come ascissa

$$x' = \frac{k\,x_1 - x_2}{k - 1}$$

il raggio è fornito dall'espressione

$$\varrho = \frac{\sqrt{k}\,(x_2 - x_1)}{k - 1} = \frac{\sqrt{k}\,d_{12}}{k - 1}$$

Analogamente si procede per i punti $P_2\ P_3$; tracciando quindi sul piano le due circonferenze così individuate si ottengono due punti di intersezione (il punto avente la z negativa va evidentemente scartato).

L'altro punto è P_0 di cui restano così graficamente individuate le coordinate $x_0\ z_0$.

Il valore della carica Q è dato dalla

$$Q = \frac{E_1\,r_1^3}{2\,z_0} = E_1\,\frac{\left(\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + z_0^2}\right)^3}{2\,z_0}$$

in questa equazione tutte le grandezze del secondo membro sono note (vedi fig. 1).

Per la soluzione del problema nello spazio si procede in modo del tutto analogo. Sono dati in questo caso, come si è detto, quattro punti sul piano $x\ y$ (vedi fig. 2). Presi due di essi $P_1\ P_2$ si fa il rapporto dei rispettivi campi elettrici $E_1\ E_2$

$$E_1 = \frac{2\,Q\,z_0}{r_1^3} \qquad E_2 = \frac{2\,Q\,z_0}{r_2^3}$$

$$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt[3]{\frac{E_1}{E_2}} = k_1 \qquad \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = k_1^2 = \left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{\frac{2}{3}} = k$$

il luogo geometrico dei punti aventi da P_1 e P_2 distanze tali che il rapporto di queste è eguale ad una costante k è dato dalla condizione

$$\frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + z^2}{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + z^2} = k$$

sviluppando e ordinando come sopra

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\,\frac{kx_1 - x_2}{k-1}\,x - 2\,\frac{ky_1 - y_2}{k-1}\,y + \frac{k(x_1^2 + y_1^2) - (x_2^2 + y_2^2)}{k-1} = 0$$

Si ottiene, come è noto, l'equazione di una sfera il cui centro c_{12} per ovvie ragioni di simmetria si trova sulla retta congiungente $P_1 P_2$ dalla parte del punto P_1 ed ha le coordinate

$$x' = \frac{kx_1 - x_2}{k-1} \qquad y' = \frac{ky_1 - y_2}{k-1}$$

il suo raggio è

$$\varrho = \frac{\sqrt{k}}{k-1}\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} = \frac{\sqrt{k}}{k-1}\,d_{12}$$

Prendendo altre due coppie di punti $P_2\ P_3$ e $P_3\ P_4$ si ottengono similmente due altre sfere. Il punto comune a questi tre luoghi geometrici è il punto cercato che rappresenta la posizione della carica.

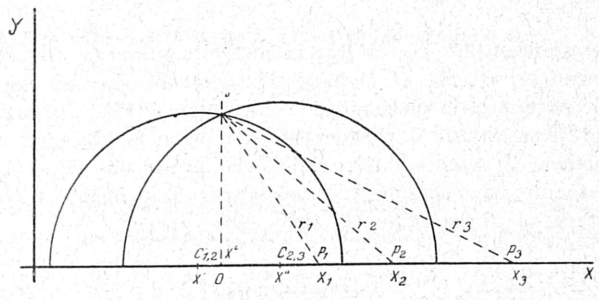

Fig. 1

Per determinare questo punto graficamente operando sul foglio del disegno si procede come segue. L'intersezione di ciascuna sfera con il piano $x\ y$ è un cerchio massimo, avente quindi lo stesso centro della sfera (cioè sul piano del disegno) e lo stesso raggio: è possibile quindi tracciarlo in base alle formule ora date. Per ogni coppia di punti considerata si ha una circonferenza; tracciandole si ottengono per ogni coppia di esse due punti intersezione.

Unendo per esempio A e B (punti di incontro delle due circonferenze relative ai punti $P_1 P_2$ e $P_2 P_3$) e i due C e D appartenenti alle circonferenze relative alle coppie $P_2 P_3$ e $P_3 P_4$ si ottengono due segmenti che si incontrano in un punto O piede della perpendicolare al piano $x\ y$ abbassata dal punto P cercato. Le coordinate di O sono quindi $x_0\ y_0$.

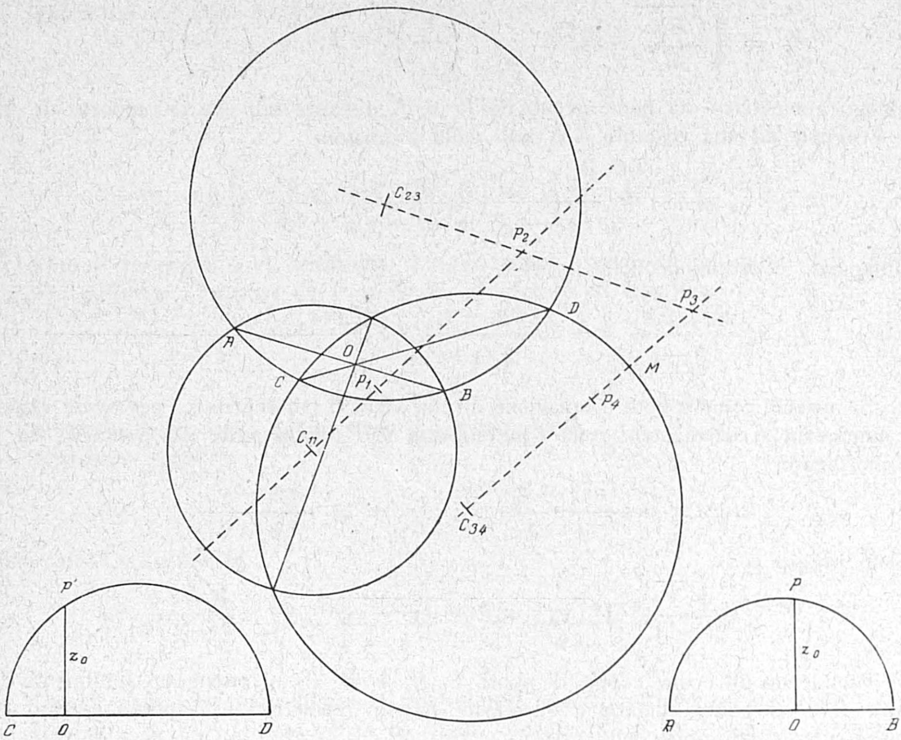

Fig. 2

Per trovare graficamente z_0 si traccia una circonferenza (fig. 2) avente quale diametro il segmento $A\ B$, da O si innalza la perpendicolare ad esso fino ad incontrare l'arco di circonferenza in un punto P'. La distanza $P'\ O$ è eguale a z_0. Questa costruzione rappresenta infatti il ribaltamento sul piano del disegno del piano verticale a cui appartiene il cerchio intersezione delle prime due superfici sferiche. Per verifica si può eseguire la medesima costruzione per il segmento $C\ D$.

Note così $x_0\ y_0\ z_0$ si determina Q dalla espressione:

$$Q = \frac{E_1\, r_1^3}{2\, z_0} = \frac{E_2\, r_2^3}{2\, z_0} \cdots = \frac{E_1}{2\, z_0} \left(\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + z_0^2}\right)^3$$

Questo procedimento di calcolo è valevole nel caso in cui i campi elettrici osservati siano dovuti alla sola carica puntiforme: allorchè all'azione di essa fosse già preesistente un campo elettrico basta sottrarre il valore di questo in ogni punto al valore osservato nell'istante in questione.

Aggiungiamo un esempio numerico di calcolo riferito al caso di quattro stazioni (vedi fig. 3), situate nei punti $P_1 P_2 P_3 P_4$ riportate in scala sul foglio del disegno. In pratica per procedere più speditamente nella costruzione grafica facciamo osservare che non è necessario conoscere le coordinate dei punti rispetto ad un sistema di assi ma è necessario solo rilevare dal disegno le distanze fra un punto e l'altro secondo la coppia che si considera.

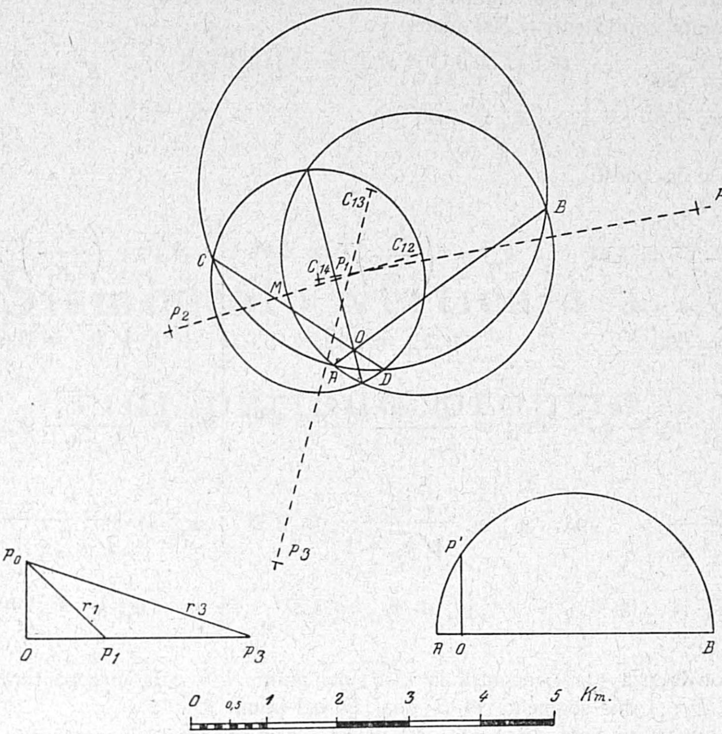

Fig. 3

Infatti il raggio della circonferenza (relativa ad esempio a P_1 e P_2) è fornito dalla formula

[a] $$\varrho = \frac{\sqrt{k}}{k-1} d_{12}$$

il centro, come si è detto, si trova sulla retta congiungente $P_1 P_2$ dalla parte del punto per il quale il campo ha un maggior valore e a distanza da esso eguale a

$$\varrho - m$$

dove m è il segmento che soddisfa alla condizione

$$\frac{m}{d-m} = \frac{r_2}{r_1} = \sqrt{k}$$

cioè determina il punto M compreso fra P_1 e P_2 in cui la circonferenza taglia la retta che unisce i due punti.

[b] è quindi
$$m = \frac{d}{\sqrt{k+1}}$$

Basta applicare perciò queste due formule (a e b) per tracciare le circonferenze.

Siano dati: (i valori del campo elettrico sono espressi in Volta per metro, le distanze in unità equivalenti a 500 metri)

$E_1 = 100$	$E_2 = 14{,}6$	$E_3 = 10{,}5$ $\quad E_4 = 2{,}13$
$d_{12} = 5{,}20$	$d_{13} = 7{,}90$	$d_{14} = 9{,}70$

Si ricava da questi

$k_{12} = \left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{\frac{2}{3}} = 3{,}61$	$k_{13} = \left(\frac{E_1}{E_3}\right)^{\frac{2}{3}} = 4{,}49$	$k_{14} = \left(\frac{E_1}{E_4}\right)^{\frac{2}{3}} = 13$
$\sqrt{k_{12}} = 1{,}90$	$\sqrt{k_{13}} = 2{,}12$	$\sqrt{k_{14}} = 3{,}61$
$\varrho_{12} = \frac{\sqrt{k_{12}}}{k_{12}-1}\, d_{12} = 3{,}79$	$\varrho_{13} = \frac{\sqrt{k_{13}}}{k_{13}-1}\, d_{13} = 4{,}80$	$\varrho_{14} = \frac{\sqrt{k_{14}}}{k_{14}-1}\, d_{14} = 2{,}92$
$m_{12} = \frac{d_{12}}{\sqrt{k_{12}}+1} = 1{,}79$	$m_{13} = \frac{d_{13}}{\sqrt{k_{13}}+1} = 2{,}53$	$m_{14} = \frac{k_{14}}{\sqrt{k_{14}}+1} = 2{,}10$
$\varrho_{12} - m_{12} = 2{,}00$	$\varrho_{13} - m_{13} = 1{,}27$	$\varrho_{14} - m_{14} = 0{,}82$

La circonferenza (1-2) incontra la (1-3) nei punti $A\ B$ e la circonferenza (1-4) nei punti $C\ D$; i due segmenti $A\ B$ e $C\ D$ nel punto O.

Riportiamo su un lato del foglio del disegno per chiarezza il segmento $A\ B$ e costruiamo su di esso la semicirconferenza. Il segmento $O\ P'$ dà la quota del punto P_0.

Le grandezze trovate sono con quelle reali nel rapporto indicato dalla scala grafica. Nella determinazione di Q si introducono le grandezze trovate e si ha (riducendo ad unità $C. G. S.$)

$$Q = \frac{E_1}{2\, z_0}\, r_1^{\,3} = \frac{1}{300} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(1{,}41)^3 \cdot 10^{15}}{10^5} = 4{,}7 \cdot 10^7 \text{ u. e s.}$$

oppure

$$Q = 1{,}56 \cdot 10^{-2} = \text{unità pratiche}$$

La determinazione del valore di una carica puntiforme e la sua posizione possono essere quindi ottenute conoscendo i valori del campo da essa prodotto in quattro punti mediante semplici costruzioni grafiche e l'applicazione di semplici formule elementari.

Nello studio dei fenomeni interessanti l'elettricità atmosferica questo metodo può essere utile per l'interpretazione delle misure del campo eseguite contemporaneamente da diverse stazioni.

Roma, dicembre 1938-XVII.