Pubblicazioni
dell'Istituto Nazionale di Geofisica del Consiglio Nazionale delle Ricerche
diretto dal prof. Antonino Lo Surdo

N. **38**

PIETRO CALOI

Sulla ricerca di cariche elettriche nell'atmosfera

ROMA
ANNO MCMXL - XVIII

ESTRATTO DA "LA RICERCA SCIENTIFICA"
ANNO XI - N. 5 - (MAGGIO 1940-XVIII), pag. 295

ROMA, 1940-XVIII - TIPOGRAFIA TERME - VIA PIETRO STERBINI, 6.

Riassunto: Si espone un metodo analitico per il calcolo della posizione e dell'entità di una carica elettrica puntiforme nell'atmosfera, usufruendo dei valori del campo da essa determinato in almeno quattro stazioni. Si dà un esempio di applicazione.

Il prof. Enrico Medi [1] ha ideato un elegante metodo grafico per la ricerca delle cariche elettriche nell'atmosfera, metodo che permette la determinazione di cariche puntiformi e la loro posizione mediante costruzioni grafiche e l'applicazione di formule elementari.

Le coordinate spaziali rispetto ad un piano-base e l'entità di dette cariche possono però essere determinate anche per via analitica, il che può consentire, quando sia necessario, un vantaggio sulla rapidità e sulla precisione.

Siano x_0, y_0, z_0 le coordinate del punto P_0, in cui possiamo pensare concentrata la carica Q. La soluzione del problema esige la conoscenza del valore del campo elettrico dovuto a detta carica, in almeno quattro punti P_1 (x_1, y_1), P_2 (x_2, y_2), P_3 (x_3, y_3), P_4 (x_4, y_4) del piano-base.

L'espressione del campo nei punti P_i (i = 1, 2, 3, ... n) è

$$E_i = \frac{2\,Q\,z_0}{r^3_i} = \frac{2\,Q\,z_0}{\left(\sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + z_0^2}\right)^3}$$

Questo sistema d'equazioni in x_0, y_0, z_0 e Q è di facile risoluzione. Esso può scriversi

$$E_i^{2/3} \left\{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + z_0^2\right\} = 2^{2/3}\,(Q \cdot z_0)^{2/3} \,,$$

oppure, ponendo

$$e_i = E_i^{2/3} \,;\; a = 2^{2/3} = 1{,}5874 \,;\; Z = (Q \cdot z_0)^{2/3} \,,$$

$$(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + z^2_0 = \frac{a}{e_i}\,Z \qquad [1]$$

Le quattro incognite sono ora x_0, y_0, z_0 e Z. Eliminiamo z_0^2 dal sistema [1]. A questo scopo, basta sottrarre una delle equazioni del sistema [1], p. es. la prima, da tutte le rimanenti. Perverremo allora al nuovo sistema

---

[1] Medi E.: *Ricerca di cariche elettriche nell'atmosfera,* « La ricerca scientifica », 1939-XVII, anno X, n. 3.

$$x_0\,(x_j - x_1) + y_0\,(y_j - y_1) + \frac{1}{2}\,a\left(\frac{1}{e_j} - \frac{1}{e_1}\right) Z = \tag{2}$$

$$= \frac{x_j^2 - x_1^2 + y_j^2 - y_1^2}{2}\,, \quad (j = 2,\, 3,\, \ldots.\, n)$$

in cui non figura più l'incognita z_0.

Il sistema [2] è facilmente risolubile in x_0, y_0 e Z. Nel caso in cui si potesse usufruire dei dati di più di quattro stazioni, la soluzione potrebbe ottenersi con il metodo dei minimi quadrati.

Una volta ottenuti i valori di x_0, y_0, Z, essi si sostituiscono in una qualunque delle equazioni del sistema [1], il che permette di ottenere subito z_0. Si avrà infine senz'altro

$$Q = \frac{Z^{3/2}}{z_0} \tag{3}$$

Con ciò il problema è risolto.

Applichiamo il metodo al caso considerato dal prof. Medi, riferendo la fig. 3 della nota citata ad un sistema di assi coordinati ([2]), in modo che le coordinate dei quattro punti assegnati siano p. es., espresse in km,
P_1 (2, 9; 4, 14) , P_2 (0,4 ; 3,4) , P_3 (1,85 ; 0,32) , P_4 (7,64 ; 4,99).

Nei punti assegnati, i valori del campo elettrico, espressi in Volta per metro, sono

$$E_1 = 100 \; ; \; E_2 = 14{,}6 \; ; \; E_3 = 10{,}5 \; ; \; E_4 = 2{,}13\,.$$

Dal sistema [2] si ha, nel caso di quattro stazioni,

$$\left|\begin{aligned}
&x_0\,(x_2 - x_1) + y_0\,(y_2 - y_1) + \frac{1}{2}\,a\left(\frac{1}{e_2} - \frac{1}{e_1}\right) Z = \\
&\qquad = \frac{x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2}{2} \\
&x_0\,(x_3 - x_1) + y_0\,(y_3 - y_1) + \frac{1}{2}\,a\left(\frac{1}{e_3} - \frac{1}{e_1}\right) Z = \\
&\qquad = \frac{x_3^2 - x_1^2 + y_3^2 - y_1^2}{2} \\
&x_0\,(x_4 - x_1) + y_0\,(y_4 - y_1) + \frac{1}{2}\,a\left(\frac{1}{e_4} - \frac{1}{e_1}\right) Z = \\
&\qquad = \frac{x_4^2 - x_1^2 + y_4^2 - y_1^2}{2}
\end{aligned}\right.$$

([2]) In pratica, il riferimento potrà essere fatto all'incrocio di un parallelo e di un meridiano della regione in cui si trovano le stazioni d'osservazione, sopra una carta al 25000. Nel problema in esame è naturalmente superflua la trasformazione delle coordinate ortogonali in coordinate geografiche.

I coefficienti di x_0, y_0, Z e i secondi membri si calcolano rapidamente con i dati a disposizione. Ne risulta il sistema:

$$\begin{cases} -2{,}5\ x_0 - 0{,}74\ y_0 + 0{,}096\ Z = -\ 6{,}9148 \\ -1{,}05\ x_0 - 3{,}82\ y_0 + 0{,}1287\ Z = -\ 11{,}0123 \\ 4{,}74\ x_0 + 0{,}85\ y_0 + 0{,}4426\ Z = 28{,}86 \end{cases}$$

dal quale segue tosto:

$$x_0 = 2{,}95\ ;\ y_0 = 3{,}01\ ;\ Z = 27{,}88.$$

Sostituendo questi valori p. es. nella:

$$(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + z_0^2 = \frac{a}{e_1} Z\ ,$$

dove x_1, y_1 sono le coordinate di P_1, si ha:

$$z_0 = 0{,}88\ .$$

Finalmente, per la [3],

$$Q = 167{,}26\ ,$$

ossia, in unità C. G. S.,

$$Q = 5{,}6 \cdot 10^7 \text{ u. e. s.}$$

e, in unità pratiche,

$$Q = 1{,}87 \cdot 10^{-2}\ .$$

I valori ottenuti per x_0, y_0, z_0 e Q differiscono di poco da quelli cui pervenne il prof. Medi; le piccole differenze rientrano nei limiti delle approssimazioni consentite dai metodi grafici.

Osservo che nel sistema [2], per stazioni assegnate, i coefficienti di x_0, y_0 e i secondi membri possono essere determinati una volta per sempre, limitando così il calcolo alle espressioni $\frac{1}{e_j} - \frac{1}{e_1}$ ($j = 2, 3, \ldots$), dipendenti dai valori del campo in P_i ($i = 1, 2, 3, \ldots$).

Il metodo analitico consente, qualora si possa usufruire dei dati di più di quattro stazioni, di conoscere, mediante soluzione con il metodo dei minimi quadrati, anche le approssimazioni con cui possono essere determinate le grandezze incognite che entrano in questo particolare problema.

Istituto nazionale di geofisica del C.N.R.
Roma, maggio 1939 XVIII.