Pubblicazioni
dell'Istituto Nazionale di Geofisica del Consiglio Nazionale delle Ricerche
diretto dal prof. Antonino Lo Surdo

N. **46**

G. ZANOTELLI

Assorbimento elementare della luce nel passaggio attraverso alle nubi

ROMA
ANNO MCMXL - XVIII

Estratto dai Rendiconti della Reale Accademia d'Italia, Classe di Scienze fisiche matematiche e naturali, Serie VII, vol. II, fasc. 1–2, 1940–XVIII.

Roma, 1940–XVIII. — Dott. G. Bardi, Tipografo della Reale Accademia d'Italia.

Geofisica. — *Assorbimento elementare della luce nel passaggio attraverso alle nubi* [1]. Nota [2] di GUGLIELMO ZANOTELLI, presentata dall'Accademico ANTONINO LO SURDO.

Nella teoria della propagazione della luce attraverso alle nubi, elaborata da MECKE [3], ALBRECHT [4], GORDOV [5] le proprietà del mezzo sono rappresentate da due coefficienti che esprimono l'attitudine dell'elemento della nube, ossia di una goccia d'acqua, a diffondere la luce e rispettivamente ad assorbirla.

Nel presente lavoro mi propongo di dimostrare come il secondo dei detti coefficienti può essere espresso in funzione delle caratteristiche fisiche della goccia, determinando teoricamente per la luce comunque diffusa e polarizzata che incida sulla goccia stessa, la quantità che viene assorbita e dissipata.

Seguirò i procedimenti dell'ottica geometrica prescindendo dalla considerazione di ogni fenomeno di diffrazione, la cui influenza d'altra parte è trascurabile quando si considerino gocce di diametro sufficientemente grande rispetto alla lunghezza d'onda della luce.

Cominciamo ad osservare che la luce diffusa perviene ad una certa goccia, nella quale intendiamo studiare l'assorbimento e che chiameremo per semplicità goccia illuminata, dalle gocce circostanti che si trovano a varie distanze da essa: ci proponiamo prima di tutto di indagare per quante di tali gocce la porzione della superficie d'onda della luce emessa da un punto qualunque di una di esse, tagliata dalla superficie della goccia illuminata, possa considerarsi piana.

Supponiamo dunque che $\mathfrak{N}$ sia il numero delle gocce contenute nell'unità di volume della nube e che queste siano tutte di uguale raggio R.

---

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale di Geofisica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(2) Pervenuta all'Accademia il 30 luglio 1940–XVIII.

(3) « Ann. d. Phys. », *65*, 257 (1921).

(4) « Meteor. ZS. », *50*, 478 (1933).

(5) « Beitr. z. Geoph. », *48*, 131 (1936).

Allora nell'intercapedine fra due sfere con centro nel centro O della goccia illuminata e di raggi l ed $l + dl$ sono evidentemente contenute $4\pi l^2 \mathfrak{N}\, dl$ gocce; ciascuna di esse viene vista da O sotto un angolo solido che è dato circa da $\pi R^2/l^2$ e cioè le gocce contenute in detta intercapedine intercettano complessivamente una porzione di angolo solido $4\pi^2 \mathfrak{N} R^2\, dl$, che, come si vede, è indipendente da l: supponendo per semplicità che una goccia diffonda la luce ugualmente in tutte le direzioni può dirsi che la quantità di luce che complessivamente perviene alla goccia illuminata dalle gocce poste in un certo strato ad una qualunque e determinata distanza è proporzionale a detto angolo solido e quindi è sempre uguale siano esse vicine o lontane da O. Si deve però osservare che esiste una certa distanza massima L oltre la quale le gocce che si trovano al di fuori della sfera di raggio L cessano di inviare la loro luce in O per essere già l'intero angolo solito 4π completamente intercettato; perciò deve essere

$$4\pi = \int_0^L 4\pi^2 \mathfrak{N} R^2\, dl, \qquad \text{cioè} \qquad L = \frac{1}{\pi \mathfrak{N} R^2}\,.$$

Osserviamo che in realtà il raggio della sfera che contiene tutte le gocce che esercitano una azione in O sarà alquanto maggiore di L per il fatto che non si è tenuto conto dell'azione di schermo che una goccia di un certo strato può esercitare su una goccia di uno strato più vicino ad O, alla quale azione corrisponde evidentemente una riduzione dell'angolo solido intercettato ed in conclusione un aumento di L. Tale correzione però, che potrebbe dedursi con considerazioni probabilistiche non ha interesse per il nostro scopo, che è quello di determinare la aliquota *massima* delle gocce contenute nella suddetta sfera, per le quali non può considerarsi piana la porzione di superficie dell'onda emessa da qualsiasi punto S di una di essa e tagliata dalla superficie della goccia illuminata.

Tale aliquota sarà costituita da tutte le gocce così vicine ad O da essere contenute in una sfera di raggio $L_0 < L$, dove L_0 è il valore minimo per cui può ammettersi che la grandezza R/L_0 sia trascurabile di fronte ad 1, ponendo così la condizione che la porzione di onda sferica emessa da S e tagliata dalla superficie della goccia illuminata possa confondersi con un piano. Tale condizione potendo ritenersi verificata ai nostri fini quando $R/L_0 = 0{,}1$, intendiamo ora fissare L_0 in modo tale che esso sia una piccola frazione di L. Se si suppone $L_0 = 0{,}01\, L$, ciò equivale a dire che in base alle precedenti considerazioni un solo centesimo della radiazione diffusa che perviene complessivamente in O proviene dalle gocce contenute nell'interno della sfera di raggio L_0, ossia che di detta radiazione il 99 % può considerarsi come incidente sulla goccia illuminata con superficie d'onda piana.

Risulta quindi che deve essere $L = 100 L_0 = 1000 R = 1/\pi R^2 \mathcal{N}$, e perciò $\pi R^3 \mathcal{N} = 1/1000$. Indicando con Q la quantità d'acqua contenuta per centimetro cubo si ha $Q = 4\pi R^3 \mathcal{N}/3 = 1{,}33.10^{-3}$ gr/cm^3. Si può quindi concludere che se nella nube non è contenuto in cifra tonda più di un milligrammo di acqua per centimetro cubo può ritenersi con certezza che della luce che perviene ad una qualsiasi goccia per diffusione dalle gocce circostanti non più dell'1 % è costituito da luce proveniente da punti di gocce così vicine che la porzione della superficie d'onda tagliata dalla superficie della goccia illuminata non possa considerarsi piana.

Prenderemo perciò in esame il caso di una goccia illuminata dalla luce diffusa dalle gocce circostanti e sufficientemente lontane in modo che la porzione di superficie d'onda tagliata dalla goccia stessa possa considerarsi come piana e determineremo per ciascuna superficie d'onda la percentuale della luce incidente assorbita e dissipata nell'interno della goccia

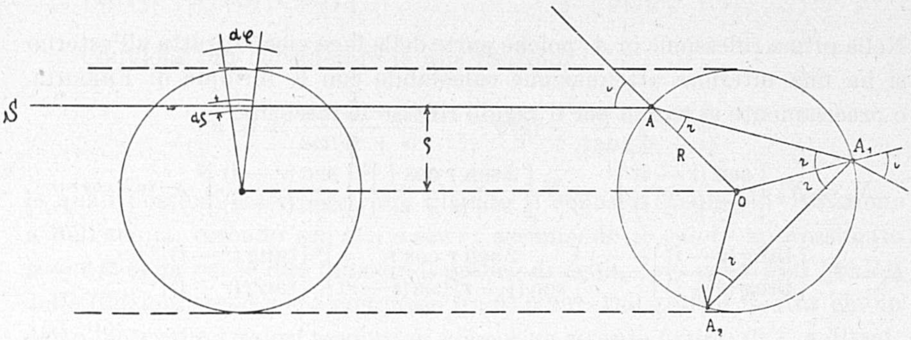

Fig. 1.

illuminata. Detta percentuale risulta indipendente dalla direzione di propagazione e dallo stato di polarizzazione della luce incidente, dipendendo solo dalle caratteristiche della goccia illuminata, e che è pertanto uguale per tutte le superficie d'onda: coincide quindi con il coefficiente di assorbimento cercato.

Si consideri una goccia di acqua sferica di raggio R ed un raggio luminoso SA (fig. 1) incidente sotto l'angolo i su un punto A della superficie di essa: si assuma il piano passante per il raggio e per il centro O della goccia, cioè il piano di incidenza, come piano della figura e siano P ed N le intensità delle componenti del campo elettrico luminoso rispettivamente nel piano e normalmente. Sia r l'angolo di rifrazione che è evidentemente uguale all'angolo di incidenza in A_1 del raggio rifratto nella prima rifrazione nell'interno della goccia, ed agli angoli successivi di incidenza e di riflessione. Nella rifrazione in A parte della luce incidente passa nel raggio riflesso mentre le intensità delle due componenti normale e parallela del raggio rifratto possono ottenersi mediante le formule di FRESNEL [1] e sono rispettivamente

$$N_0 = N \left[\frac{2 \operatorname{sen} r \cos i}{\operatorname{sen}(i+r)} \right]^2 , \quad P_0 = P \left[\frac{2 \operatorname{sen} r \cos i}{\operatorname{sen}(i+r)\cos(i-r)} \right]^2 .$$

Nel percorso da A ad A_1 si ha una attenuazione del raggio rifratto secondo la legge dell'assorbimento, e chiamando α il coefficiente di assorbimento dell'acqua, essendo $AA_1 = 2R \cos r$ all'arrivo in A_1 le suddette intensità saranno divenute

$$N_0' = N_0\, e^{-2\alpha R \cos r} = N \left[\frac{2 \operatorname{sen} r \cos i}{\operatorname{sen}(i+r)} \right]^2 e^{-2\alpha R \cos r} ,$$

$$P_0' = P_0\, e^{-2\alpha R \cos r} = P \left[\frac{2 \operatorname{sen} r \cos i}{\operatorname{sen}(i+r)\cos(i-r)} \right]^2 e^{-2\alpha R \cos r} .$$

Nella prima riflessione in A_1 poichè parte della luce viene rifratta all'esterno si ha una ulteriore attenuazione calcolabile con le formule di FRESNEL e precisamente si hanno per il raggio riflesso le intensità

$$N_1 = N_0' \left[\frac{\operatorname{sen}(r-i)}{\operatorname{sen}(r+i)} \right]^2 = N \left[\frac{2 \operatorname{sen} r \cos i}{\operatorname{sen}(i+r)} \right]^2 \left[\frac{\operatorname{sen}(r-i)}{\operatorname{sen}(r+i)} \right]^2 e^{-2\alpha R \cos r} ,$$

$$P_1 = P_0' \left[\frac{\operatorname{tang}(r-i)}{\operatorname{tang}(r+i)} \right]^2 = P \left[\frac{2 \operatorname{sen} r \cos i}{\operatorname{sen}(i+r)\cos(i-r)} \right]^2 \left[\frac{\operatorname{tang}(r-i)}{\operatorname{tang}(r+i)} \right]^2 e^{-2\alpha R \cos r} .$$

Nel percorso $A_1 A_2$ si ha un'altra attenuazione per assorbimento, ed in A_2 una attenuazione nella seconda riflessione in modo che dopo di questa le intensità saranno divenute

$$N_2 = N \left[\frac{2 \operatorname{sen} r \cos i}{\operatorname{sen}(i+r)} \right]^2 \left[\frac{\operatorname{sen}(r-i)}{\operatorname{sen}(r+i)} \right]^4 e^{-4\alpha R \cos r} ,$$

$$P_2 = P \left[\frac{2 \operatorname{sen} r \cos i}{\operatorname{sen}(i+r)\cos(i-r)} \right]^2 \left[\frac{\operatorname{tang}(r-i)}{\operatorname{tang}(r+i)} \right]^4 e^{-4\alpha R \cos r} ,$$

ed in generale dopo la k–esima riflessione

$$N_k = N \left[\frac{2 \operatorname{sen} r \cos i}{\operatorname{sen}(i+r)} \right]^2 \left[\frac{\operatorname{sen}(r-i)}{\operatorname{sen}(r+i)}\, e^{-\alpha R \cos r} \right]^{2k} ,$$

$$P_k = P \left[\frac{2 \operatorname{sen} r \cos i}{\operatorname{sen}(i+r)\cos(i-r)} \right]^2 \left[\frac{\operatorname{tang}(r-i)}{\operatorname{tang}(r+i)}\, e^{-\alpha R \cos r} \right]^{2k} .$$

---

(1) Cfr. WOOD, *Optique physique*, t. 2, pag. 21, Parigi, 1914.

La intensità luminosa assorbita nel percorso $A_k\, A_{k+1}$ è per le due componenti evidentemente data da

$$N_k\,(1 - e^{-2\alpha R \cos r}) \quad , \quad P_k\,(1 - e^{-2\alpha R \cos r})$$

e la intensità complessivamente assorbita nel percorso della luce nell'interno della goccia è rispettivamente

$$N_a = \sum_0^\infty {}_k\, N_k\,(1 - e^{-2\alpha R \cos r}) =$$

$$= N \left[\frac{2 \operatorname{sen} r \cos i}{\operatorname{sen}(i+r)}\right]^2 (1 - e^{-2\alpha R \cos r}) \sum_0^\infty {}_k \left[\frac{\operatorname{sen}(r-i)}{\operatorname{sen}(r+i)}\, e^{-\alpha R \cos r}\right]^{2k},$$

$$P_a = \sum_0^\infty {}_k\, P_k\,(1 - e^{-2\alpha R \cos r}) =$$

$$= P \left[\frac{2 \operatorname{sen} r \cos i}{\operatorname{sen}(i+r)\cos(i-r)}\right]^2 (1 - e^{-2\alpha R \cos r}) \sum_0^\infty {}_k \left[\frac{\operatorname{tang}(r-i)}{\operatorname{tang}(r+i)}\, e^{-\alpha R \cos r}\right]^{2k}.$$

Conviene ora considerare le due funzioni

$$u(i) = \frac{\operatorname{sen}(r-i)}{\operatorname{sen}(r+i)} \quad , \quad v(i) = \frac{\operatorname{tang}(r-i)}{\operatorname{tang}(r+i)}$$

le quali possono essere costruite quando si conosca l'indice di rifrazione n dell'acqua, essendo $\operatorname{sen} i = n \operatorname{sen} r$; assumendo il valore approssimato $n = 4/3$ si ha per le due funzioni il grafico di fig. 2, dove sono dati i valori delle funzioni stesse per i compreso fra 0° e 90°. Dal grafico risulta che in detto intervallo i valori assoluti di u e v sono sempre minori di 1, e divengono uguali all'unità per $i = 90°$. D'altra parte per $\alpha \neq 0$ si ha che la grandezza $x = 2\alpha R \cos r$ è nello stesso intervallo sempre positiva e diversa da zero e perciò le grandezze $u^2 e^{-x}$, $v^2 e^{-x}$ sono o nulle o positive e minori di 1. Pertanto le due serie contenute nelle formule precedenti sotto i segni di sommatoria convergono e possono esprimersi come somme di progressioni geometriche. Si ha così

$$N_a = N \left[\frac{2 \operatorname{sen} r \cos i}{\operatorname{sen}(i+r)}\right]^2 \frac{1 - e^{-x}}{1 - u^2 e^{-x}},$$

$$P_a = P \left[\frac{2 \operatorname{sen} r \cos i}{\operatorname{sen}(i+r)\cos(i-r)}\right]^2 \frac{1 - e^{-x}}{1 - v^2 e^{-x}}.$$

Il coefficiente di assorbimento dell'acqua α ha per le radiazioni comprese fra 4500 Å e 8100 Å un valore molto piccolo che raggiunge, secondo i dati di ASCHKINASS (1) un massimo di 0,0241 cm^{-1} in corrispondenza alle

(1) « Ann. d. Phys. u. Chem. », *55*, 401 (1895).

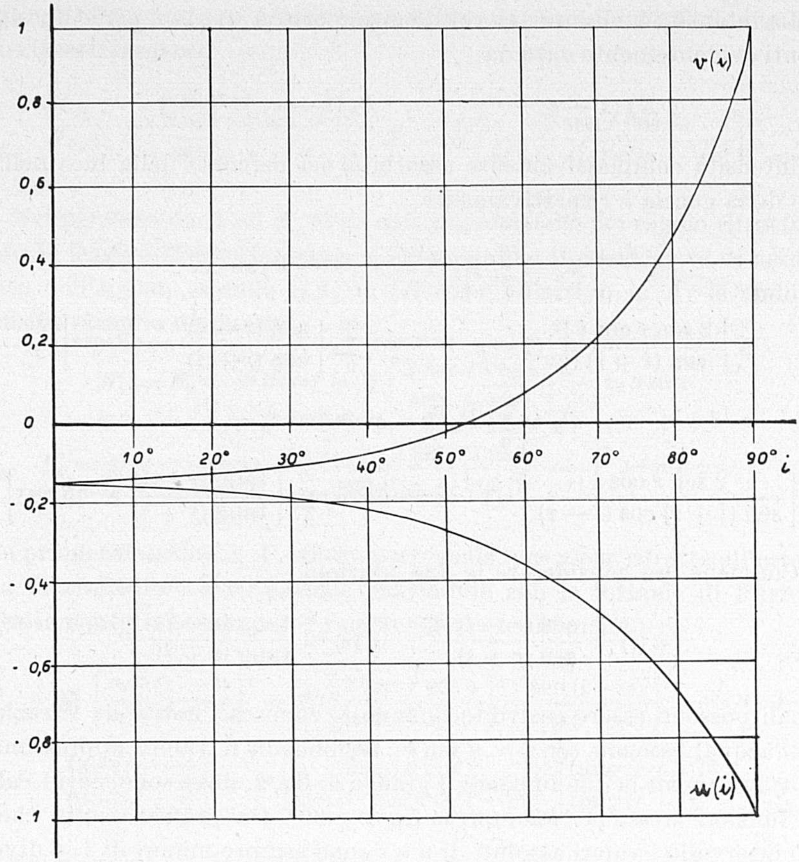

Fig. 2.

lunghezze d'onda di 7500 Å e 7750 Å. Ritenendo R sempre minore di 0,25 cm. (¹), poichè $\cos r$ raggiunge il valore 0,66 circa in corrispondenza ad $i = 90^\circ$, si ha che x è sempre minore od al più uguale ad $8 \cdot 10^{-3}$. Si può pertanto assumere in tale approssimazione che sia $1 - e^{-x}$ uguale ad x, e sostituendo nelle formule precedenti si ha con alcune successive trasformazioni formali

$$N_a = N \left[\frac{2 \operatorname{sen} r \cos i}{\operatorname{sen}(i+r)}\right]^2 \frac{x}{1 - u^2 + u^2 x} = \frac{2 \alpha R N}{n} p(i) \cos i \,,$$

$$P_a = P \left[\frac{2 \operatorname{sen} r \cos i}{\operatorname{sen}(i+r) \cos(i-r)}\right]^2 \frac{x}{1 - v^2 + v^2 x} = \frac{2 \alpha R P}{n} q(i) \cos i$$

dove si è posto

$$p(i) = \frac{1}{1 + \dfrac{u^2 x}{1 - u^2}} \,, \quad q(i) = \frac{1}{1 + \dfrac{v^2 x}{1 - v^2}} \,.$$

(¹) Cfr. Lenard, « Meteor. ZS. », *21*, 249 (1904).

Le due funzioni N_a e P_a hanno andamento assai simile fra loro e che coincide per un largo tratto dell'intervallo compreso fra 0^o e 90^o con l'andamento di $\cos i$, poichè per la piccolezza di x, le funzioni $p(i)$ e $q(i)$ si mantengono sensibilmente uguali all'unità fino nelle vicinanze di $i = 90^o$, ove tendono a zero. In fig. 3 è rappresentato l'andamento di $p(i)$ e $q(i)$ per il valore $x = 8.10^{-3}$ e con la scala adottata i diagrammi delle due funzioni risultano sensibilmente sovrapposti.

Le formule soprascritte ci forniscono l'intensità luminosa assorbita nell'interno della goccia in funzione dell'angolo di incidenza, e perciò volendo conoscere l'energia assorbita complessivamente quando la goccia

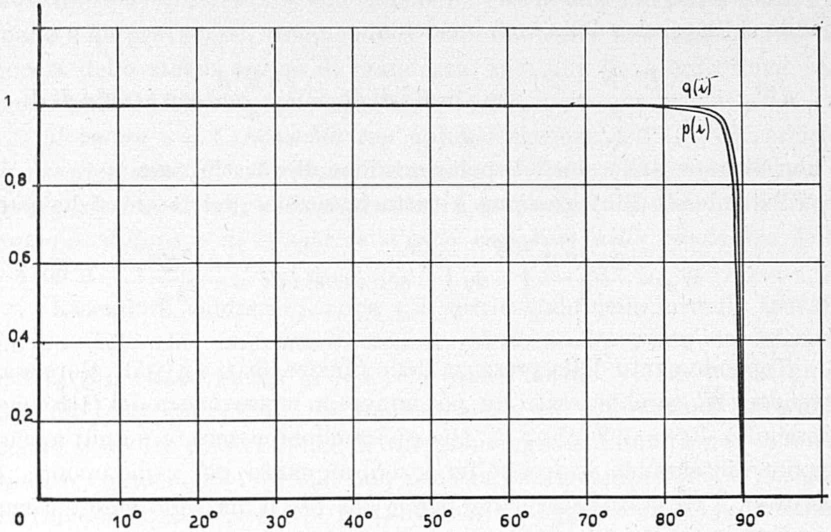

Fig. 3.

venga investita da un fascio di luce parallela occorrerà sommare i contributi all'assorbimento dei raggi incidenti sotto tutti gli angoli compresi fra 0^o e 90^o. Si consideri a tale scopo una sezione retta del fascio che investe la goccia ed in essa un elemento della superficie stessa costituito da una porzione di corona circolare di raggio ρ e spessore $d\rho$ (fig. 1) compresa fra due raggi facenti tra loro l'angolo elementare $d\varphi$: l'area di detto elemento è evidentemente data da $\rho \, d\varphi \, d\rho$ cioè, poichè $\rho = R \operatorname{sen} i$, da $R^2 \operatorname{sen} i \cos i \, di \, d\varphi$: la potenza luminosa che attraversa tale area è per ciascuna delle componenti N e P espressa da

$$dW_n = NR^2 \operatorname{sen} i \cos i \, di \, d\varphi \,,$$

$$dW_p = PR^2 \operatorname{sen} i \cos i \, di \, d\varphi \,;$$

di tale potenza la parte che viene assorbita nella goccia è invece, applicando le formule trovate

$$dW_{an} = N_a R^2 \operatorname{sen} i \cos i \, di \, d\varphi = \frac{2 \alpha R^3 N}{n} p(i) \operatorname{sen} i \cos^2 i \, di \, d\varphi ,$$

$$dW_{ap} = P_a R^2 \operatorname{sen} i \cos i \, di \, d\varphi = \frac{2 \alpha R^3 P}{n} q(i) \operatorname{sen} i \cos^2 i \, di \, d\varphi .$$

Per procedere alla integrazione osserviamo che le funzioni $p(i)$ e $q(i)$ si mantengono sensibilmente uguali all'unità fino nelle vicinanze di $i = 90^o$ ove d'altra parte il contributo all'integrale della funzione integranda è assai piccolo a causa della presenza del fattore $\cos^2 i$ che è ivi quasi nullo. Trascureremo perciò nell'integrazione senz'altro i due fattori $p(i)$ e $q(i)$, salvo poi a tener conto dell'errore così introdotto nel risultato.

Con tale approssimazione l'energia complessivamente assorbita è, chiamando J l'intensità della luce incidente,

$$dW_a = \frac{2 \alpha R^3 (N + P)}{n} \operatorname{sen} i \cos^2 i \, di \, d\varphi = \frac{2 \alpha R^3 J}{n} \operatorname{sen} i \cos^2 i \, di \, d\varphi$$

e non dipende dallo stato di polarizzazione di quest'ultima.

Estendendo l'integrazione a tutta la sezione del fascio si ha perciò

$$W_a = \frac{2 \alpha R^3 J}{n} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} i \cos^2 i \, di = \frac{4 \pi \alpha R^3 J}{3 n} .$$

Tenendo conto della presenza delle funzioni $p(i)$ e $q(i)$ il valore esatto ottenuto W'_a sarebbe stato un po' minore in conseguenza del fatto che in prossimità di $i = 90^o$ sia $p(i)$ che $q(i)$ tendono a zero, e quindi anche la funzione integranda andrebbe ivi a zero alquanto più rapidamente. Per discutere il risultato osserviamo perciò che per il massimo valore assunto $x = 8.10^{-3}$, e per $i = 78^o$ le suddette due funzioni assumono ancora valori che differiscono dall'unità solo di circa il 0,5 % e rispettivamente 0,2 % in meno, e perciò può fondatamente prescindersi, nell'approssimazione dell'1 %, dalla loro presenza nella funzione integranda per tutto l'intervallo tra 0^o e 78^o. Nell'intervallo da 78^o a 90^o la funzione integranda dà un contributo alla grandezza W'_a, che, per il fatto che sia $p(i)$ che $q(i)$ tendono a zero in prossimità di 90^o, è alquanto minore di

$$\Delta W_a = \frac{4 \pi \alpha R^3 J}{n} \int_{78^0}^{90^0} \operatorname{sen} i \cos^2 i \, di = 8{,}99 \cdot 10^{-3} \frac{4 \pi \alpha R^3 J}{3 n} .$$

Il valore esatto W'_a della energia assorbita sarà dunque tale che $W_a > W'_a > W_a - \Delta W_a$, e pertanto il valore W_a da noi determinato è un valore approssimato in eccesso a meno dell'1 % essendo appunto

$$\frac{\Delta W_a}{W_a} = 8{,}99 \cdot 10^{-3} < \frac{1}{100} .$$