PUBBLICAZIONI
DELL'ISTITUTO NAZIONALE DI GEOFISICA
DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE
diretto dal prof. ANTONINO LO SURDO Accademico d'Italia

N. 58

PIETRO CALOI

Determinazione delle coordinate ipocentrali di un terremoto ad origine vicina con i tempi delle onde longitudinali e trasversali dirette

ROMA
ANNO MCMXLI-XIX

ESTRATTO DA "LA RICERCA SCIENTIFICA"
ANNO 12° - N. 4 - APRILE 1941-XIX, pag. 431

ROMA, 1941-XIX - TIPOGRAFIA TERME - VIA PIETRO STERBINI, 6

Riassunto: Si espone un nuovo metodo analitico per la determinazione delle coordinate epicentrali e della profondità ipocentrale di un terremoto ad origine vicina. Il metodo è basato sulla conoscenza delle velocità di propagazione e dei tempi di arrivo delle onde *Pg* ed *Sg*.

1. — Quasi tutti i metodi, analitici o grafici, per la determinazione delle coordinate spaziali di un terremoto sfruttano esclusivamente i tempi di registrazione delle onde longitudinali dirette (terremoti vicini) o rifratte (terremoti lontani).

Il motivo principale di questa preferenza deve ricercarsi nel fatto che le onde *Pg* e *Pn* iniziano un sismogramma e pertanto i tempi che ad esse si riferiscono, nel caso di inizi chiari, possono essere determinati con molta precisione. Ugual precisione non sempre è possibile nei tempi che si riferiscono all'inizio delle onde trasversali (*Sg* o *Sn*), in quanto queste onde vengono registrate nel corso del sismogramma e il loro inizio può apparire incerto. In effetti però è da osservare che se questo può talvolta accadere, in compenso le onde *Sg* e *Sn* sono generalmente molto più ampie delle *Pg* e *Pn* e che gli inizi ad impeto sono facilmente individuabili. Studi accurati compiuti negli ultimi decenni su terremoti ad origine vicina, hanno provato che le onde *Sg* sono individuabili entro limiti d'errore spesso più piccoli di quelli relativi alle onde *Pg*.

I metodi che fanno uso dei tempi riferentisi alle onde longitudinali possono quindi estendersi senz'altro ai tempi di inizio delle onde trasversali.

Poichè interpretazioni accurate possono consentire uguale fiducia ai tempi di registrazione delle onde longitudinali e trasversali, un metodo che sfruttasse contemporaneamente i tempi d'inizio dei due diversi tipi di onde, presenterebbe sugli altri un notevole vantaggio: quello di lasciare i risultati immuni dagli errori di correzione del tempo, errori che, in molte stazioni ancora, sono tutt'altro che trascurabili. Simile metodo può anzi prescindere dai tempi corretti e, quando si conosca con precisione la velocità di scorrimento dei rulli registratori, può permettere persino l'uso di sismogrammi privi dei segnali orari.

2. — Indichiamo con t_1 e t_2 i tempi di registrazione delle onde *Pg* ed *Sg* in una stazione sismica di distanza epicentrale Δ. Se indichiamo

con Δ_h la distanza ipocentro-stazione sismica, e con v_1 e v_2 le velocità di propagazione delle onde *Pg* ed *Sg* rispettivamente, sarà:

$$\Delta_h = \frac{v_1 \cdot v_2}{v_1 - v_2} (t_2 - t_1) .$$

Facciamo la posizione:

$$k = \frac{v_1 \cdot v_2}{v_1 - v_2} .$$

Supponiamo di avere a disposizione i tempi di inizio delle onde *Pg* ed *Sg* in tre stazioni *1*, *2*, *3* e siano T_1, T_2 e T_3 le differenze nei tempi d'arrivo delle *Sg* e *Pg* nelle stazioni considerate.

Accoppiamo la stazione *1* con la stazione *2*: le sfere di centro in 1 e 2 e raggi kT_1 e kT_2 rispettivamente hanno in comune un cerchio verticale passante per l'ipocentro e contenente l'epicentro. L'epicentro infatti verrà a trovarsi sul diametro intersezione del cerchio detto con la superficie della Terra. L'accoppiamento di *1* con *3* (o di *2* con *3*) porta all'individuazione dell'epicentro, come intersezione del diametro suddetto con il diametro del nuovo cerchio, comune alla superficie della Terra. Individuato l'epicentro, la profondità ipocentrale sarà data dalla lunghezza del segmento che intercede fra l'epicentro e il punto d'incontro con la circonferenza, costruita su uno dei diametri trovati, della normale condotta dall'epicentro al diametro prescelto.

Su questi principi, in sostanza, è fondato il metodo grafico per la ricerca dell'epicentro e della profondità ipocentrale, ideato dal giapponese Takahasi ([1]).

Ma il metodo stesso ammette anche una facile soluzione analitica, che consente di raggiungere nei risultati una maggior precisione.

Consideriamo le tre sfere di centri *1*, *2*, *3* e raggi kT_1, kT_2 e kT_3 rispettivamente. Riferiamoci ad un sistema di assi ortogonali facendo coincidere la superficie terrestre, supposta piana, con il piano xy: siano x_0, y_0; x_1, y_1; x_2, y_2 e x_3, y_3 le coordinate ortogonali dell'epicentro e delle tre stazioni *1*, *2*, *3*. Conseguono le equazioni:

$$\begin{aligned}
(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + z_0^2 - (kT_1)^2 &= 0 \\
(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 + z_0^2 - (kT_2)^2 &= 0 \qquad [1] \\
(x_3 - x_0)^2 + (y_3 - y_0)^2 + z_0^2 - (kT_3)^2 &= 0
\end{aligned}$$

Poniamo:

$$\begin{aligned}
2\,c_1 &= -(kT_1)^2 + x_1^2 + y_1^2 \\
2\,c_2 &= -(kT_2)^2 + x_2^2 + y_2^2 \\
2\,c_3 &= -(kT_3)^2 + x_3^2 + y_3^2 .
\end{aligned}$$

Le [1] possono allora scriversi:

$$\begin{aligned} z_0^2 + x_0^2 + y_0^2 - 2\,x_1\,x_0 - 2\,y_1\,y_0 + 2\,c_1 &= 0 \\ z_0^2 + x_0^2 + y_0^2 - 2\,x_2\,x_0 - 2\,y_2\,y_0 + 2\,c_2 &= 0 \\ z_0^2 + x_0^2 + y_0^2 - 2\,x_3\,x_0 - 2\,y_3\,y_0 + 2\,c_3 &= 0\,. \end{aligned} \qquad [1']$$

Eliminiamo z_0. Sottraendo, per esempio, la 2ª e la 3ª delle [1'] rispettivamente, dalla 1ª si hanno le equazioni:

$$\begin{aligned} x_0\,(x_2 - x_1) + y_0\,(y_2 - y_1) - (c_2 - c_1) &= 0 \\ x_0\,(x_3 - x_1) + y_0\,(y_3 - y_1) - (c_3 - c_1) &= 0\ , \end{aligned}$$

che rappresentano gli assi radicali delle coppie di circonferenze determinate dall'intersezione delle sfere *1-2*, *1-3* con la superficie terrestre.
Se ne deducono, per le incognite, le espressioni:

$$x_0 = \frac{c_1\,(y_2 - y_3) + c_2\,(y_3 - y_1) + c_3\,(y_1 - y_2)}{x_1\,(y_2 - y_3) + x_2\,(y_3 - y_1) + x_3\,(y_1 - y_2)}$$

$$y_0 = \frac{c_1\,(x_3 - x_2) + c_2\,(x_1 - x_3) + c_3\,(x_2 - x_1)}{x_1\,(y_2 - y_3) + x_2\,(y_3 - y_1) + x_3\,(y_1 - y_2)}$$

Potendo disporre dei dati di quattro o più stazioni, il problema può essere risolto col metodo dei minimi quadrati.

Sia i il numero delle stazioni. Se riferiamo tutte le stazioni ad una (la prima) scelta come fondamentale, le equazioni degli assi radicali conducono al sistema:

$$x_0 + \frac{y_j - y_1}{x_j - x_1}\,y_0 - \frac{c_j - c_1}{x_j - x_1} = 0\ , \qquad [2]$$

$$(j = 2\,,\,3\,,\,\ldots\,n)$$

essendo:

$$2\,c_i = -(kT_i)^2 + x_i^2 + y_i^2 \quad , \quad (i = 1\,,\,2\,,\,3\,\ldots\,n)$$

$$T_i = (t_2 - t_1)_i \quad ,$$

dove t_1 e t_2 sono i tempi di registrazione delle onde Pg ed Sg rispettivamente, in una stessa stazione.

Poniamo:

$$\alpha = \frac{y_j - y_1}{x_j - x_1}\ ;\quad \beta = \frac{c_j - c_1}{x_j - x_1}\ . \qquad (j = 2\,,\,3\,,\,\ldots\,n) \qquad [3]$$

Le [2] si riducono a:

$$x_0 + \alpha\,y_0 = \beta\ \ ,$$

Le equazioni normali sono pertanto:

$$[1\cdot 1]\ x_0 + [1\cdot\alpha]\ y_0 = [1\cdot\beta]$$

$$[1\cdot\alpha]\ x_0 + [\alpha\cdot\alpha]\ y_0 = [\alpha\cdot\beta]\quad ,$$

da cui:

$$y_0 = \frac{[\alpha\beta\cdot 1]}{[\alpha\alpha\cdot 1]}\quad ;\quad x_0 = -\frac{[1\cdot\alpha]}{[1\cdot 1]}\ y_0 + \frac{[1\cdot\beta]}{[1\cdot 1]}\ , \qquad [4]$$

dove:

$$[\alpha\beta\cdot 1] = [\alpha\beta] - \frac{[1\cdot\alpha]}{[1\cdot 1]}\ [1\cdot\beta]\quad ;\quad [\alpha\alpha\cdot 1] =$$

$$= [\alpha\cdot\alpha] - \frac{[1\cdot\alpha]}{[1\cdot 1]}\ [1\cdot\alpha]\quad .$$

Se invece consideriamo le stazioni tutte alla stessa stregua, il sistema da risolvere diventa:

$$x_0 + \frac{y_j - y_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}\ y_0 - \frac{x_j - x_{j-1}}{c_j - c_{j-1}} = 0 \qquad (j = 2, 3, \ldots n) \qquad [5]$$

e valgono ancora le [4], salvo che in esse va fatto:

$$\alpha = \frac{y_j - y_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}\ ;\qquad \beta = \frac{c_j - c_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}\ (j = 2, 3, \ldots n)\ .$$

3. — Applichiamo il metodo esposto ad un terremoto già studiato in precedenza. Consideriamo, ad esempio il terremoto del Lago di Costanza del 31 gennaio 1935. Applicando il metodo delle iperboli di A. Mohorovicic ai tempi di registrazione delle Pg, Hiller ([2]) aveva ottenuto per l'epicentro di questo terremoto le coordinate:

$$\lambda = 9^0\ 1',0\ \mathrm{E}\quad ;\quad \varphi = 47^0\ 42',0\ \mathrm{N}\ .$$

Hiller si valse dei tempi relativi alle onde Pg, contenuti nell'unita tabella:

	Coordinate rettangolari delle stazioni		Tempi d'inizio onde	
	x_i	y_i	Pg	S_g
1. Ravensburg . . .	+ 44,7 km	+ 9,5 km	13h39m39s, 0	39m44s, 4
2. Zurigo	— 32,95	— 36,75	39 , 6	46 , 0
3. Messstetten	— 4,04	+ 53,55	40 , 1	47 , 6
4. Basilea	— 108,0	— 16,8	50 , 5	40 04 , 1
5. Stoccarda	+ 13,0	+ 119,1	51 , 95	07 , 0
6. Karlsruhe	— 44,1	+ 145,95	58 , 0	17 , 0
7. Neuchâtel	— 156,3	— 76,0	40 01 , 9	23 , 8 .

Schmerwitz, applicando un suo nuovo metodo analitico [3], scelse come riferimento per le coordinate ortogonali delle stazioni il punto individuato dall'epicentro ottenuto da Hiller. Le coordinate ortogonali ottenute da Schmerwitz sono quelle riportate nelle due prime colonne della tabella. Come risultato dei suoi calcoli, riferiti anche nel metodo di Schmerwitz esclusivamente alle onde Pg (o alle Sg) il ricercatore tedesco ottenne un punto che differiva da quello di Hiller di:

$$x_0 = +0{,}8 \text{ km} \quad ; \quad y_0 = +0{,}6 \text{ km} .$$

Applichiamo il nostro metodo usufruendo contemporaneamente dei tempi relativi alle Pg e alle Sg. Riferiamoci alle [2], considerando Ravensburg come stazione fondamentale.

Gli elementi necessari alla soluzione del problema sono contenuti nella seguente tabella. Il valore di k è stato ottenuto scegliendo per la velocità delle Pg e delle Sg i valori trovati da Schmerwitz:

$$v_1 = 5{,}65 \text{ km/sec.} \quad ; \quad v_2 = 3{,}32 \text{ km/sec.}$$

Ne risulta:

$$k = 8{,}05$$

	T_i	$(kT_i)^2$	$x_i^2 + y_i^2$	c_i	$\frac{y_j - y_1}{x_j - x_1}$	$\frac{c_j - c_1}{x_j - x_1}$
1. Ravensburg . .	5ˢ, 4	1889,64	2088,34	+ 198,70		
2. Zurigo	6 , 4	2654,31	2436,26	— 218,05	+ 0,5956	+ 2,6835
3. Messstetten . .	7 , 5	3645,14	2883,92	— 761,22	— 0,9038	+ 9,8474
4. Basilea	13 , 6	11985,87	11946,24	— 39,63	+ 0,1722	+ 0,7804
5. Stoccarda . . .	15', 05	14677,93	14353,81	— 324,12	— 3,4574	+ 8,2464
6. Karlsruhe . . .	19 , 0	23393,70	23246,21	— 147,49	— 1,5366	+ 1,9493
7. Neuchâtel . . .	21 , 9	31079,93	30205,69	— 874,24	+ 0,4254	+ 2,6690 .

Risolte le equazioni normali, si ottengono per le incognite i valori:

$$x_0 = +3{,}25 \text{ km} \quad ; \quad y_0 = -1{,}4 \text{ km} ,$$

in buon accordo quindi con i valori ottenuti da Hiller e da Schmerwitz per altre vie.

Se consideriamo tutte le stazioni alla stessa stregua, si ottengono per i coefficienti della y_0 e per i termini noti nella [5] i seguenti valori:

	$\frac{y_j - y_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}$	$\frac{c_j - c_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}$
1. Ravensburg		
2. Zurigo	+ 0,5956	+ 2,6835
3. Messstetten	+ 3,1235	— 9,3942
4. Basilea	+ 0,6767	— 3,4705
5. Stoccarda	+ 1,1231	— 1,1756
6. Karlsruhe	— 0,4702	— 1,5467
7. Neuchâtel	+ 1,9782	+ 3,2386

Ne risulta per le incognite:

$$x_0 = +0{,}35 \text{ km} \quad ; \quad y_0 = -1{,}7 \text{ km}$$

in ottimo accordo con i valori precedenti di Hiller e di Schmerwitz.

Applichiamo ora lo stesso metodo al terremoto di Radicofani del 19 giugno 1940.

Seguono le differenze nei tempi di registrazione delle onde Pg ed Sg nelle quattro stazioni più vicine all'epicentro:

	φ	λ	τ_i
1. Siena	43° 19′ N	11° 20′, 5 E	8ˢ, 0
2. Perugia	43° 7′	12° 20′	8 , 0
3. Prato	43° 53′	11° 05′, 5	17 , 3
4. Roma - I.N.G. . . .	41° 54′, 2	12° 30′, 8	17 , 9

Le coordinate ortogonali delle quattro stazioni scritte, riferite ai cerchi massimi incrociantisi nel punto di coordinate geografiche 43° N, 12° E sono riportate qui sotto. Uno dei cerchi massimi coincide con il meridiano e costituisce l'asse delle y, orientato positivamente verso N; il verso positivo sull'asse delle x (che naturalmente non coincide con il parallelo 43° N) fa con il N un azimut di 90° gradi, contato da N verso E. La determinazione di dette coordinate è stata fatta con rigorosi metodi geodetici.

	x_i	y_i
Siena	— 53,40 km	+ 35,40 km
Perugia	+ 27,76	+ 13,02
Prato	— 72,98	+ 98,50
Roma - I.N.G. . .	+ 42,59	— 121,68 .

L'applicazione delle [2] facendo, per l'Italia centrale, $k = 7{,}1$, porta ai seguenti valori per le coordinate ortogonali dell'epicentro:

$$x_0 = -24{,}5 \text{ km} \quad ; \quad y_0 = -14{,}7 \text{ km} .$$

L'applicazione delle [5] conduce invece ai valori:

$$x_0 = -22{,}8 \text{ km} \quad ; \quad y_0 = -13{,}2 \text{ km} .$$

Mutando, con i metodi rigorosi della geodesia, questi ultimi valori delle coordinate ortogonali in coordinate geografiche, otteniamo per l'epicentro le coordinate:

$$\varphi = 42^0\,52',8 \text{ N} \quad ; \quad \lambda = 11^0\,43',25 \text{ E} ,$$

che individuano un punto fra Radicofani e Abbadia, nei pressi del Monte Amiata, dove il terremoto ebbe la massima intensità macrosismica.