PUBBLICAZIONI
DELL'ISTITUTO NAZIONALE DI GEOFISICA
DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE
diretto dal prof. ANTONINO LO SURDO Accademico d'Italia

N. 78

PAOLO EMILIO VALLE

# Nuovo metodo per la determinazione delle coordinate ipocentrali di un terremoto lontano

ROMA
ANNO MCMXLII-XX

*Estratto dai Rendiconti della R. Accademia d'Italia,*
*Classe di Scienze fisiche matematiche e naturali,*
*Serie, VII, vol. III. fasc. 11, 1942–XX.*

Roma 1942-XX. — Dott. G. Bardi, Tipografo della Reale Accademia d'Italia.

**Geofisica** (Sismologia). — *Nuovo metodo per la determinazione delle coordinate ipocentrali di un terremoto lontano* [1]. Nota di PAOLO EMILIO VALLE, presentata [2] dall'Accademico ANTONINO LO SURDO.

1. I metodi analitici per la determinazione delle coordinate epicentrali di un terremoto lontano, si basano esclusivamente sulla conoscenza dei tempi di arrivo delle onde longitudinali dirette, della profondità ipocentrale e della relativa dromocrona media.

Non si fa uso dei tempi d'inizio delle onde trasversali dirette, poichè sembra più agevole cogliere con precisione l'inizio della fase *P* che quello della fase *S*. Tuttavia, abbastanza frequentemente, le onde trasversali dirette, le quali, in generale, si presentano nei sismogrammi maggiormente sviluppate delle onde longitudinali, hanno un inizio individuabile con sufficiente precisione; appare quindi ingiustificato non avvalersene.

Devesi rilevare che una delle maggiori difficoltà che si incontrano nell'applicazione dei metodi analitici per la determinazione delle coordinate epicentrali di un terremoto lontano, risiede nella ricerca della profondità ipocentrale, la cui conoscenza, richiesta *a priori*, deve essere stabilita in modo rigoroso, dato che non è suscettibile di correzione una volta determinate le coordinate dell'epicentro e il tempo origine.

Risulta tutt'altro che facile, com'è noto, stabilire con precisione la profondità di un terremoto, a meno che i sismogrammi non presentino sicuri e chiari inizi di onde riflesse in prossimità dell'epicentro. Tale difficoltà sussiste natulmente sia che si usino i tempi d'inizio delle onde longitudinali che trasversali.

Nel metodo che sarà esposto, basato sulla differenza dei tempi di arrivo di due fasi, si ovvia, almeno in parte, al sopracitato inconveniente e si eliminano gli errori dovuti alla correzione del tempo, che, non sempre, risultano trascurabili.

---

(1) Pubblicazione n. 78 dell'Istituto Nazionale di Geofisica del Consiglio Nazionale delle Ricerche, diretto dal prof. ANTONINO LO SURDO, Accademico d'Italia.

(2) Presentata nell'Adunanza del 10 aprile 1942-XX.

2. Indicando con $\Delta$ la distanza epicentrale, con $h$ la profondità ipocentrale di un terremoto, siano

$$[1] \qquad tf_1 = \varphi_1(\Delta , h) \quad , \quad tf_2 = \varphi_2(\Delta , h)$$

le equazioni delle dromocrone medie, che si suppongono note, di due fasi; risulti inoltre per esempio, $tf_1 > tf_2$.

Posto

$$[2] \qquad \tau = \varphi_1(\Delta , h) - \varphi_2(\Delta , h) = \psi(\Delta , h) > 0$$

si consideri un certo numero $n$ di Osservatori e siano $\lambda_i , \varphi_i$ le coordinate (per esempio, geocentriche) dell'$i^{mo}$ Osservatorio.

Dette $\lambda_0 , \varphi_0$ le coordinate dell'epicentro del terremoto, risulterà

$$[3] \qquad \Delta_i = \Delta(\lambda_i , \varphi_i \; ; \; \lambda_0 , \varphi_0) \qquad i = 1 , \cdots , n$$

dove con $\Delta$ indichiamo una qualsiasi relazione, per esempio, di trigonometria sferica, che fornisca le distanze epicentrali $\Delta_i$ in funzione delle quantità $\lambda_i , \varphi_i \; ; \; \lambda_0 , \varphi_0$.

Siano $t_i f_1$ e $t_i f_2$ i tempi di arrivo delle fasi $f_1$ ed $f_2$ all'$i^{mo}$ Osservatorio, $h_0$ la profondità ipocentrale; avremo

$$\tau_i = t_i f_1 - t_i f_2$$

o anche

$$[4] \qquad \tau_i = \psi\left[\Delta(\lambda_i , \varphi_i \; ; \; \lambda_0 , \varphi_0) , h_0\right] \qquad i = 1 , \cdots , n .$$

Ciò posto si possono considerare tre casi:

1°) sono da determinare $\lambda_0 , \varphi_0 , h_0$

2°) » » » $\lambda_0 , \varphi_0$

3°) è » » $h_0$.

3. Esaminiamo il primo caso. Si supponga di aver determinato in qualche modo, una posizione approssimata dell'epicentro e un valore, anch'esso approssimato, della profondità ipocentrale.

Dette $\lambda , \varphi , h$ le coordinate approssimate dell'ipocentro, risulterà:

$$[5] \qquad \begin{cases} \lambda_0 = \lambda + \xi \\ \varphi_0 = \varphi + \eta \\ h_0 = h + \zeta . \end{cases}$$

Siano $\tau_{i_0}$ le differenze dei tempi di arrivo delle due fasi $f_1$ ed $f_2$, osservate all'$i^{mo}$ Osservatorio, e $\tau_{ic}$ i valori di $\tau_i$ che si ottengono ponendo nella [4] al posto di $\lambda_0 , \varphi_0 , h_0$ i loro valori approssimati $\lambda , \varphi , h$.

L'errore sarà

$$E_i = \tau_{i0} - \tau_{ic} \qquad i = 1, \cdots, n$$

ossia, avuto riguardo alla [4] e alle [5],

$$[6] \quad E_i = \psi\,[\Delta(\lambda_i, \varphi_i\,;\,\lambda + \xi, \varphi + \eta), h + \xi] - \psi[\Delta(\lambda_i, \varphi_i\,;\,\lambda, \varphi), h].$$

Sviluppando la differenza a secondo membro della precedente in serie di potenze e supponendo che le coordinate approssimate dell'ipocentro $\lambda, \varphi, h$ siano state scelte così prossime a $\lambda_0, \varphi_0, h_0$ da potersi trascurare le potenze d'ordine superiore al primo delle quantità $\xi, \eta, \zeta$, l'equazione dell'errore si scrive, con evidente significato dei simboli,

$$[7] \qquad E_i = \left(\frac{\partial\psi}{\partial\Delta}\right)_i \left(\frac{\partial\Delta}{\partial\lambda}\right)_i \xi + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\Delta}\right)_i \left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)_i \eta + \left(\frac{\partial\psi}{\partial h}\right)_i \zeta.$$

Dalla [2], ove si indichino con $v_i f_1$ e $v_i f_2$ le velocità apparenti delle due fasi relative all'$i^{mo}$ Osservatorio, si ha:

$$[8] \qquad \left(\frac{\partial\psi}{\partial\Delta}\right)_i = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\Delta}\right)_i - \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\Delta}\right)_i = \frac{v_i f_2 - v_i f_1}{v_i f_1\, v_i f_2} = K_i.$$

Posto quindi

$$[9] \quad K_i\left(\frac{\partial\Delta}{\partial\lambda}\right)_i = a_i \quad K_i\left(\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi}\right)_i = b_i \quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial h}\right)_i = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial h}\right)_i - \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial h}\right)_i = c_i$$

$$i = 1, \cdots, n$$

l'equazione dell'errore diventa:

$$[10] \qquad E_i = a_i\,\xi + b_i\,\eta + c_i\,\zeta$$

da cui il sistema normale che fornisce i valori più probabili delle correzioni $\xi, \eta, \zeta$.

$$[11] \qquad \begin{cases} [aa]\,\xi + [ab]\,\eta + [ac]\,\zeta = [aE] \\ [ba]\,\xi + [bb]\,\eta + [bc]\,\zeta = [bE] \\ [ca]\,\xi + [cb]\,\eta + [cc]\,\zeta = [cE]. \end{cases}$$

Se si desiderano conoscere gli errori medi della soluzione $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$ del sistema [11], indicando con $Q_{rs} = Q_{sr}$ i complementi algebrici del determinante del sistema, divisi per il determinante stesso, si ha:

$$\xi = \xi_0 \pm \mu\sqrt{Q_{11}}$$

$$\eta = \eta_0 \pm \mu\sqrt{Q_{22}}$$

$$\zeta = \zeta_0 \pm \mu\sqrt{Q_{33}}.$$

Il valore dello scarto medio $\mu$ si può calcolare mediante la relazione

$$\mu = \sqrt{\frac{[vv]}{n-3}}$$

dove

$$[vv] = [aE]\,\xi_0 + [bE]\,\eta_0 + [cE]\,\zeta_0 + [EE]$$

mentre i $Q_{rs}$ soddisfano ai sistemi:

$$\left\{\begin{array}{l} [aa]\,Q_{11} + \cdots\cdots + [ac]\,Q_{13} - 1 = 0 \\ [ba]\,Q_{11} + \cdots\cdots + [bc]\,Q_{13} \quad\;\; = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + [cc]\,Q_{13} \quad\;\; = 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} [aa]\,Q_{21} + \cdots\cdots + [ac]\,Q_{23} \quad\;\; = 0 \\ \cdots\cdots + [bb]\,Q_{22} + [bc]\,Q_{23} - 1 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} [aa]\,Q_{31} + \cdots\cdots + [ac]\,Q_{33} \quad\;\; = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\; [cc]\,Q_{33} - 1 = 0 \end{array}\right.$$

È superfluo avvertire che il metodo va reiteramente applicato fino ad ottenere valori di $\xi, \eta, \zeta$ sufficientemente piccoli, in modo che le loro potenze risultino trascurabili.

4. I casi 2º e 3º rientrano come particolari nelle considerazioni precedenti. Se infatti è nota la profondità ipocentrale, con buona approssimazione, il sistema normale [11], per essere $c_i = (\partial\psi/\partial h)_i = 0$, si riduce a

$$[12] \qquad \begin{array}{l} [aa]\,\xi + [ab]\,\eta = [aE] \\ [ba]\,\xi + [bb]\,\eta = [bE]\,. \end{array}$$

Se è nota le posizione dell'epicentro il sistema si riduce ulteriormente, poichè

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\Delta}\right)_i \left(\frac{\partial\Delta}{\partial\lambda}\right)_i = \left(\frac{\partial\psi}{\partial\Delta}\right)_i \left(\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi}\right)_i = 0$$

e si ha

$$[13] \qquad \zeta_0 = \frac{[cE]}{[cc]}\,.$$

5. Per l'effettiva applicazione numerica di quanto è stato esposto, è necessario conoscere le funzioni $\varphi_1$ e $\varphi_2$ o anche la funzione $\psi$, relativa alle fasi $f_1$ ed $f_2$, che assumeremo senz'altro uguali rispettivamente alla fase $S$ e $P$.

È stata dedotta la $\psi$ dalla tavola di G. J. BRUNNER per $30^o \leqq \Delta \leqq 80^o$ e per $0 \leqq h \leqq 400$ km. In tale intervallo della distanza epicentrale $\Delta$ le dromocrone delle onde longitudinali e trasversali dirette non subiscono notevoli discontinuità, mentre la $\partial\psi/\partial h$ si mantiene abbastanza grande,

È stato posto

[14] $$\psi(\Delta, h) = \Sigma_{ik}\, c_{ik}\, \Delta'^{\,i}\, h'^{\,k}$$

dove $\Delta' = \dfrac{\Delta^0 - 30}{10}$ e $h' = 10^{-2}\, h$. La $\psi$ risulta espressa in secondi.

I coefficienti $c_{ik}$ sono stati calcolati in relazione alle dromocrone medie tracciate nella tavola sopracitata per $h = 0$, $h = 100$, $h = 200$. $h = 300$, $h = 400$ km. e sono contenuti nella tabella I.

Giova avvertire che in considerazione della scala dei diagrammi di G. J. BRUNNER, dello spessore della linea e dei conseguenti errori di valutazione, la [14] è da ritenersi approssimata a meno di 2 o 3 decimi di secondo.

TABELLA I.

$c_{ik}$

| $i$ | $k$ = 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | + 306 | — 12,25 | + 5 | — 2 | + 0,25 |
| 1 | + 65,37143 | + 5,56303 | — 4,32869 | + 1,57497 | — 0,20456 |
| 2 | + 0,65238 | — 1,494431 | — 0,213508 | + 0,1944508 | — 0,019842 |
| 3 | — 0,333333 | + 0,0793655 | + 0,1896816 | — 0,0888885 | + 0,0103174 |

Per quanto riguarda le $\left(\dfrac{\partial\Delta}{\partial\lambda}\right)_i$ e $\left(\dfrac{\partial\Delta}{\partial\varphi}\right)_i$, si possono usare le derivate parziali della nota relazione:

[15] $$\cos\Delta_i = \alpha_i \cos\varphi \cos\lambda + \beta_i \cos\varphi \sin\lambda + \gamma_i \sin\varphi$$

e cioè

[16] $$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial\Delta}{\partial\lambda}\right)_i = \dfrac{\cos\varphi\,(\alpha_i \sin\lambda - \beta_i \cos\lambda)}{\sin\Delta_i} \\[2ex] \left(\dfrac{\partial\Delta}{\partial\varphi}\right)_i = \dfrac{\sin\varphi\,(\alpha_i \cos\lambda + \beta_i \sin\lambda) - \gamma_i \cos\varphi}{\sin\Delta_i} \end{cases}$$

dove $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ sono le costanti dell'$i^{mo}$ Osservatorio, $\lambda$ e $\varphi$ le coordinate dell'epicentro approssimato.

6. Onde far vedere come il metodo sopra esposto conduca a risultati soddisfacenti, è stato applicato al terremoto dell'Alaska del 22 luglio 1937.

Si sono presi in considerazione i tempi di arrivo delle onde $P$ ed $S$ relativi a n. 20 Osservatori e contenuti nella tabella II.

Come coordinate dell'epicentro approssimato sono state scelte quelle calcolate da N. ADKINS, col metodo di GEIGER, adoperando la dromocrona di H. JEFFREYS e precisamente:

$$[17] \quad \begin{cases} \lambda = 146^{o},58 \text{ W} \\ \varphi = \ \ 64^{o},67 \text{ N} \end{cases}$$

o, in coordinate geocentriche,

$$[17'] \quad \begin{cases} \lambda = 146^{o},58 \text{ W} \\ \varphi = \ \ 64^{o},52 \text{ N} \end{cases}$$

mentre la profondità ipocentrale approssimata è stata stabilita:

$$[18] \qquad h = 70 \text{ km}.$$

Dalla [14] risulta:

$$[19] \quad \psi(\Delta\,, 70) = 299{,}249 + 67{,}63559\,\Delta' - 0{,}436409\,\Delta'^2 - 0{,}2128451\,\Delta'^3$$

$$[20] \qquad 10\left(\frac{\partial\psi}{\partial\Delta}\right)_{h=70} = 67{,}63559 - 0{,}872818\,\Delta' - 0{,}6385353\,\Delta'^2$$

$$[20'] \quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial h}\right)_{h=70} = -\,7{,}847 + 2{,}00401\,\Delta' - 1{,}534722\,\Delta'^2 + 0{,}2284091\,\Delta'^3.$$

Sono stati calcolati i valori dei coefficienti $a_i\,, b_i\,, c_i$ mediante le [16] e le [20].

La coordinata $\varphi$ è stata assunta geocentrica.

Il sistema normale a cui si è pervenuti vale:

$$[21] \quad \begin{cases} 91{,}180\,\xi + \ \ 1{,}619\,\eta + \ 268{,}809\,\zeta + \ 12{,}919 = 0 \\ 1{,}619\,\xi + 436{,}203\,\eta + \ 358{,}288\,\zeta + \ 75{,}449 = 0 \\ 268{,}809\,\xi + 358{,}288\,\eta + 1469{,}339\,\zeta + 152{,}731 = 0\,. \end{cases}$$

I valori di $\xi\,, \eta\,, \zeta$ che soddisfano tale sistema sono:

$$\xi_0 = +\,0{,}265 \text{ gradi}$$

$$\eta_0 = -\,0{,}061 \quad \text{»}$$

$$\zeta_0 = -\,0{,}137 \cdot 10^2 \text{ km}.$$

| Osservatorio | $\Delta^0$ | $t_S$ h | m | s | $t_P$ h | m | s | $\tau_{i0}$ secondi | $\tau_{ic}$ secondi | $E_i$ secondi |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Berkeley . . . . . . . | 30,44 | 17 | 20 | 46 | 17 | 15 | 44 | 302 | 302,2 | — 0,2 |
| Mount Wilson . . . . . | 35,05 | | 22 | 00 | | 16 | 25 | 335 | 333,3 | + 1,7 |
| Riverside . . . . . . . | 35,47 | | | 04 | | | 28 | 336 | 336,1 | — 0,1 |
| Chicago . . . . . . . . | 39,98 | | 23 | 16 | | 17 | 09 | 367 | 366,1 | + 0,9 |
| Ivigtut . . . . . . . . | 40,59 | | | 22 | | | 12 | 370 | 370,1 | — 0,1 |
| Florissant . . . . . . . | 41,14 | | | 34 | | | 17 | 377 | 373,8 | + 3,2 |
| S. Louis. . . . . . . . | 41,58 | | | 37 | | | 17 | 380 | 376,7 | + 3,3 |
| Fordham . . . . . . . | 46,75 | | 24 | 50 | | 18 | 02 | 408 | 410,3 | — 2,3 |
| Abisko . . . . . . . . | 46,88 | | | 55 | | | 02 | 413 | 411,2 | + 2,8 |
| Columbia . . . . . . . | 49,42 | | 25 | 30 | | | 22 | 428 | 427,4 | + 0,6 |
| Tacubaya . . . . . . . | 55,04 | | 26 | 48 | | 19 | 08 | 460 | 462,5 | — 2,5 |
| Stonyhurst . . . . . . | 58,62 | | 27 | 34 | | | 30 | 484 | 484,3 | — 0,3 |
| Copenaghen . . . . . . | 58,88 | | | 36 | | | 30 | 486 | 485,8 | + 0,2 |
| Mosca. . . . . . . . . | 59,88 | | | 51 | | | 37 | 494 | 491,8 | + 2,2 |
| Kew . . . . . . . . . | 61,28 | | 28 | 07 | | | 47 | 500 | 500 | 0 |
| De Bilt. . . . . . . . | 61,53 | | | 12 | | | 50 | 502 | 501,5 | + 0,5 |
| Uccle . . . . . . . . . | 62,68 | | | 25 | | | 56 | 509 | 508,2 | + 0,8 |
| Zurigo . . . . . . . . | 66,62 | | 29 | 15 | | 20 | 21 | 534 | 530,6 | + 3,4 |
| Vienna . . . . . . . . | 66,64 | | | 15 | | | 22 | 533 | 530,7 | + 2,3 |
| Neuchâtel . . . . . . | 66,77 | | | 16 | | | 23 | 533 | 531,5 | + 1,5 |

Pertanto le coordinate dell'epicentro e la profondita ipocentrale risultano:

$$\lambda_0 = 146^o{,}84\ \mathrm{W}$$
$$\varphi_0 = 64^o{,}58\ \mathrm{N}$$
$$h_0 = 56{,}3\ \mathrm{km}\,.$$

I primi due valori sono in buon accordo con i valori [17'].

Sono stati calcolati gli errori medi di ciascuna correzione e si è ottenuto:

$$\mu_{\xi_0} = \pm\ 0{,}422\ \text{gradi}$$
$$\mu_{\eta_0} = \pm\ 0{,}146\ \ \text{»}$$
$$\mu_{\zeta_0} = \pm\ 0{,}126\cdot 10^2\ \mathrm{km}$$

che non risultano eccessivi, specie per quanto riguarda la profondità ipocentrale.

Estratto dalle Memorie della Reale Accademia d'Italia, Classe di Scienze fisiche matematiche e naturali, Serie VII, vol. III, fasc. 11, 1942-XX.