PUBBLICAZIONI
DELL'ISTITUTO NAZIONALE DI GEOFISICA
DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE
diretto dal prof. ANTONINO LO SURDO Accademico d'Italia

N. 96

PIETRO CALOI

Nuovo metodo per determinare le coordinate ipocentrali e le velocità di propagazione delle onde longitudinali e trasversali dirette

ROMA
ANNO MCMXLIII-XXI

Dai « Rendiconti della Reale Accademia d'Italia », Classe di Scienze fisiche matematiche e naturali, Serie VII, vol. IV, fasc. 9, 1943-XXI.

Geofisica (Sismologia). — *Nuovo metodo per determinare le coordinate ipocentrali e le velocità di propagazione delle onde longitudinali e trasversali dirette.* Nota di PIETRO CALOI, presentata [1] dall'Accademico ANTONINO LO SURDO.

In tutti i metodi di calcolo per la determinazione delle coordinate spaziali di un ipocentro di terremoto ad origine vicina, la velocità di propagazione delle onde longitudinali e trasversali dirette è ritenuta costante. Questa ipotesi si può considerare valevole per la quasi totalità degli scopi che si possono perseguire nello studio di terremoti vicini. Però nella determinazione della profondità ipocentrale, il fatto di ritenere costante la velocità di propagazione può condurre spesso a risultati illusori. La velocità di propagazione delle onde *Pg* ed *Sg* non è, in realtà costante. In una data zona, essa varia con la profondità; varia inoltre in senso orizzontale, da zona a zona.

G. SCHMERWITZ, ha ideato, di recente, un metodo in cui considera incognite, oltre al tempo origine e alle coordinate ipocentrali, pure la velocità delle onde *Pg* (oppure *Sg*, a seconda che ci si vale dei tempi di registrazione dell'uno o dell'altro tipo d'onda).

I risultati ottenuti con i metodi basati sui tempi di registrazione di un solo tipo d'onda risentono sempre degli inevitabili errori derivanti da imperfetta correzione dell'ora. Allo scopo di prescindere da questi errori che possono spesso infirmare i risultati del calcolo, ho ritenuto opportuno escogitare un metodo che sfrutti le *differenze* dei tempi di registrazione delle onde *Sg* e *Pg*, pur conservando incognite, oltre alle coordinate ipocentrali, anche le velocità di propagazione delle onde stesse.

Indichiamo con t_1, t_2 rispettivamente i tempi di registrazione delle onde *Pg*, *Sg* in una stazione assegnata; la distanza dell'ipocentro da detta stazione può essere espressa da

$$k\,(t_2 - t_1),$$

---

(1) Nell'Adunanza del 19 febbraio 1943-XXI.

se k ha il valore

$$k = \frac{v_1 \cdot v_2}{v_1 - v_2},$$

v_1, v_2 esprimendo le velocità medie di propagazione delle onde Pg, Sg.

Siano x_0, y_0, z_0 le coordinate spaziali dell'ipocentro e x_i, y_i, z_i le analoghe coordinate di una generica stazione S_i, riferite alla medesima origine. La coordinata z_i, che esprime l'altezza della stazione sul livello del mare, è trascurabile rispetto alle grandezze in giuoco; pertanto, la riterremo uguale a zero.

È quindi, in generale,

$$k^2 (t_2 - t_1)_i^2 = (x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + z_0^2 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Poniamo

$$\Phi_i = \frac{1}{k} \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + z_0^2} - (t_2 - t_1)_i.$$

Dovrà essere

$$\Phi_i = \Phi_i (x_0, y_0, z_0, k) = 0.$$

Se il numero delle equazioni supera quello delle incognite, e se indichiamo con (x_0), (y_0), (z_0), (k) un sistema di valori approssimati per le incognite, possiamo porre

$$x_0 = (x_0) + x \quad ; \quad y_0 = (y_0) + y \quad ; \quad z_0 = (z_0) + z \quad ; \quad k = (k) + k_1,$$

dove x, y, z, k_1 rappresentano le correzioni incognite.

Avremo, limitando lo sviluppo di Φ_i in serie di Taylor al primo termine,

$$\Phi_i = \Phi_i(0) + \frac{\partial \Phi_i(0)}{\partial (x_0)} x + \frac{\partial \Phi_i(0)}{\partial (y_0)} y + \frac{\partial \Phi_i(0)}{\partial (z_0)} z + \frac{\partial \Phi_i(0)}{\partial (k)} k_1,$$

dove

$$\frac{\partial \Phi_i(0)}{\partial (x_0)} = \frac{1}{(k)} \frac{(x_0) - x_i}{\sqrt{(x_i - (x_0))^2 + (y_i - (y_0))^2 + (z_0)^2}} = a_i$$

$$\frac{\partial \Phi_i(0)}{\partial (y_0)} = \frac{1}{(k)} \frac{(y_0) - y_i}{\sqrt{(x_i - (x_0))^2 + (y_i - (y_0))^2 + (z_0)^2}} = b_i$$

$$\frac{\partial \Phi_i(0)}{\partial (z_0)} = \frac{1}{(k)} \frac{(z_0)}{\sqrt{(x_i - (x_0))^2 + (y_i - (y_0))^2 + (z_0)^2}} = c_i$$

$$\frac{\partial \Phi_i(0)}{\partial (k)} = -\frac{1}{(k^2)} \sqrt{(x_i - (x_0))^2 + (y_i - (y_0))^2 + (z_0)^2} = d_i$$

$$\Phi_i(0) = \frac{1}{(k)} \sqrt{(x_i - (x_0))^2 + (y_i - (y_0))^2 + (z_0)^2} - (t_2 - t_1)_i = l_i$$

$$(i = 1, 2, 3, \cdots, n).$$

Le equazioni da risolvere divengono quindi:

$$a_i x + b_i y + c_i z + d_i k_1 + l_i = v_i \,, \qquad (i = 1\,, 2\,, \cdots, n)$$

in cui i secondi membri rappresentano i residui dovuti alle osservazioni.

Il verificarsi della condizione di minimo per la somma dei quadrati dei residui – funzione di $x\,, y\,, z\,, k_1$ – conduce al sistema di equazioni normali, sotto la forma loro assegnata da Gauss:

$$\begin{aligned}
[aa]\cdot x + [ab]\cdot y + [ac]\cdot z + [ad]\cdot k_1 + [al] &= 0\\
[ab]\cdot x + [bb]\cdot y + [bc]\cdot z + [bd]\cdot k_1 + [bl] &= 0\\
[ac]\cdot x + [bc]\cdot y + [cc]\cdot z + [cd]\cdot k_1 + [cl] &= 0\\
[ad]\cdot x + [bd]\cdot y + [cd]\cdot z + [dd]\cdot k_1 + [dl] &= 0\,.
\end{aligned}$$

La soluzione del sistema di equazioni normali conduce alle equazioni finali:

$$\begin{aligned}
[aa]\cdot x + [ab]\cdot y + [ac]\cdot z + [ad]\cdot k_1 + [al] &= 0\\
[bb.\,1]\cdot y + [bc.\,1]\cdot z + [bd.\,1]\cdot k_1 + [bl.\,1] &= 0\\
[cc.\,2]\cdot z + [cd.\,2]\cdot k_1 + [cl.\,2] &= 0\\
[dd.\,3]\cdot k_1 + [dl.\,3] &= 0
\end{aligned}$$

dove

$$[bb.\,1] = [bb] - \frac{[ab]}{[aa]}\cdot[ab] \qquad [bc.\,1] = [bc] - \frac{[ab]}{[aa]}\cdot[ac] \qquad [bd.\,1] = [bd] - \frac{[ab]}{[aa]}\cdot[ad] \qquad [bl.\,1] = [bl] - \frac{[ab]}{[aa]}\cdot[al]$$

$$[cc.\,2] = [cc.\,1] - \frac{[bc.\,1]}{[bb.\,1]}\cdot[bc.\,1] \qquad [cd.\,2] = [cd.\,1] - \frac{[bc.\,1]}{[bb.\,1]}\cdot[bd.\,1] \qquad [cl.\,2] = [cl.\,1] - \frac{[bc.\,1]}{[bb.\,1]}\cdot[bl.\,1]$$

$$[cc.\,1] = [cc] - \frac{[ac]}{[aa]}\cdot[ac] \qquad [cd.\,1] = [cd] - \frac{[ac]}{[aa]}\cdot[ad] \qquad [cl.\,1] = [cl] - \frac{[ac]}{[aa]}\cdot[al]$$

$$[dd.\,2] = [dd.\,1] - \frac{[bd.\,1]}{[bb.\,1]}\cdot[bd.\,1] \qquad [dl.\,2] = [dl.\,1] - \frac{[bd.\,1]}{[bb.\,1]}\cdot[bl.\,1]$$

$$[dd.\,1] = [dd] - \frac{[ad]}{[aa]}\cdot[ad] \qquad [dd.\,3] = [dd.\,2] - \frac{[cd.\,2]}{[cc.\,2]}\cdot[cd.\,2]$$

$$[dl.\,1] = [dl] - \frac{[ad]}{[aa]}\cdot[al] \qquad [dl.\,3] = [dl.\,2] - \frac{[cd.\,2]}{[cc.\,2]}\cdot[cl.\,2]\,.$$

È bene calcolare, come verifica, anche lo schema $[ll.\ 4]$, in quanto esso, com'è noto dalla teoria degli errori, se i calcoli sono esatti deve uguagliare la somma dei quadrati degli errori $[vv]$. Si ha:

$$[ll.\ 1] = [ll] - \frac{[al]}{[aa]} \cdot [al] \qquad [ll.\ 3] = [ll.\ 2] - \frac{[cl.\ 2]}{[cc.\ 2]} \cdot [cl.\ 2]$$

$$[ll.\ 2] = [ll.\ 1] - \frac{[bl.\ 1]}{[bb.\ 1]} \cdot [bl.\ 1] \qquad [ll.\ 4] = [ll.\ 3] - \frac{[dl.\ 3]}{[dd.\ 3]} \cdot [dl.\ 3].$$

Indicando con ε, m_x, m_y, m_z, m_{k_1} rispettivamente l'errore medio dell'unità di peso e gli errori medi dei valori più probabili delle incognite, si ha

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\frac{[ll.\ 4]}{n-4}} \quad ; \quad m_x = \frac{\varepsilon}{\sqrt{[aa.\ 3]}} \quad ; \quad m_y = \frac{\varepsilon}{\sqrt{[bb.\ 3]}} \quad ;$$

$$m_z = \frac{\varepsilon}{\sqrt{[cc.\ 3]}} \quad ; \quad m_{k_1} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{[dd.\ 3]}} .$$

Per determinare $[aa.\ 3]$, $[bb.\ 3]$, $[cc.\ 3]$ basta ordinare i sistemi di equazioni normali partendo rispettivamente dalle equazioni

$$d_i k_1 + c_i z + b_i y + a_i x = v_i \quad , \quad d_i k_1 + c_i z + a_i x + b_i y = v_i ,$$

$$a_i x + b_i y + d_i k_1 + c_i z = v_i , \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) .$$

Dalle applicazioni già fatte del metodo sopra esposto sono pervenuto a risultati particolarmente interessanti specie sull'andamento del fattore k – e, quindi, delle velocità di propagazione – al variare della profondità. Detti risultati formeranno l'argomento di una prossima Nota.

Estratto dalle Memorie della Reale Accademia d'Italia, Classe di Scienze fisiche matematiche e naturali, Serie VII, vol. IV, fasc. 9, 1943-XXI.