PUBBLICAZIONI
DELL'ISTITUTO NAZIONALE DI GEOFISICA
DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE
diretto dal prof. ANTONINO LO SURDO Accademico d'Italia

N. 100

PAOLO EMILIO VALLE

Assorbimento e smorzamento di alcuni tipi di onde sismiche

ANNO MCMXLIII-XXI
ROMA

ESTRATTO DA "LA RICERCA SCIENTIFICA"
ANNO 14° - N. 4 - APRILE 1943, pag. 177

ROMA 1943 - TIPOGRAFIA TERME - VIA PIETRO STERBINI, 6

Riassunto: I materiali che costituiscono gli strati interessati dalla propagazione dell'energia sismica, non si comportano come perfettamente elastici ma presentano notevoli deviazioni dal caso ideale. Allo scopo di contribuire alle ricerche sull'argomento, si studia la propagazione di onde in un mezzo che presenti un particolare smorzamento e assorbimento selettivo. Dei casi trattati risulta che un'onda subisce una continua deformazione nello spazio e nel tempo, mentre il suo massimo si propaga con velocità non costante

E' noto che quasi tutti i materiali non si comportano come perfettamente elastici, ma presentano delle anomalie che dipendono dalla loro costituzione, dalla temperatura, dalla durata e tipo di sollecitazione cui vengono sottoposti.

E' generalmente ammesso che i corpi possano presentare, ad una determinata temperatura, fenomeni di attrito interno e di scorrimento plastico.

L'attrito interno impedisce al corpo di raggiungere, sotto l'azione di una certa forza, istantaneamente la configurazione di equilibrio, mentre lo scorrimento plastico provoca una deformazione residua al cessare della forza applicata.

Questi caratteristici comportamenti possono presentarsi in un corpo sia separatamente che contemporaneamente.

Nel caso in cui si presenti il solo attrito interno i corpi prendono il nome di firmo-viscosi; nel caso del solo scorrimento plastico prendono il nome di elasto-viscosi (1).

Le sopracitate anomalie influiscono notevolmente sulla propagazione, nell'interno e in superficie, delle onde elastiche.

Si trova, per esempio, che, in un mezzo firmo-viscoso, non tutte le frequenze possono essere propagate; si ha dispersione e ogni onda elementare risulta smorzata nel tempo.

Tutti i mezzi assorbono più o meno notevolmente parte dell'energia propagata.

Le leggi della propagazione dell'energia nell'interno e sulla superficie dei mezzi, non sono conosciute con la precisione desiderabile, poichè le deviazioni dei diversi materiali dalle leggi del corpo perfettamente elastico, non sono, in generale, esattamente esprimibili mediante relazioni matematiche fra i parametri atti a caratterizzare il comportamento del mezzo e gli spostamenti propagati; inoltre spesso difficoltà matematiche rendono penosa la comprensione del fenomeno fisico. Tuttavia teorie di prima approssimazione forniscono utili indicazioni sulle modalità della propagazione dell'energia.

Sezawa [2] ha considerato la propagazione di onde piane elementari del tipo:

$$u\,(x\,,t) = B\; e^{-w_1 \eta^2 t}\; e^{i\eta\,(x \pm v_1 t)} \qquad [1]$$

dove w_1 e v_1 sono costanti.

In tale tipo di onda, ottenuto come prima approssimazione dalla teoria dei corpi firmo-viscosi, la velocità di propagazione v_1, è considerata costante, mentre in realtà dipende da η mediante la relazione:

$$v = \pm \sqrt{v_1^2 - w_1^2\,\eta^2} \qquad [2]$$

quindi è sempre presente la dispersione.

Si deve però osservare che la teoria di Sezawa, basata sulla relazione [1] ha notevolmente contribuito alla spiegazione di alcuni fatti sperimentali.

La [1] esprime il fatto che l'ampiezza del moto di un punto alla distanza x, raggiunto dall'onda elementare, diminuisce col passare del tempo in dipendenza della frequenza del moto stesso.

Dato che ciò è fisicamente plausibile, la [1] può ammettersi a priori, indipendentemente dalle considerazioni sulla natura del comportamento del mezzo elastico in cui avviene la propagazione dell'energia.

Recentemente N. Ricker [3], studiando la propagazione di onde sismiche longitudinali provocate da esplosioni, ha fatto notare che la forma delle onde registrate dagli appositi apparecchi, può essere abbastanza bene spiegata ammettendo che i materiali costituenti gli strati interessati dalla propagazione, presentino uno spettro di assorbimento. In altre parole, il coefficiente di assorbimento sarebbe una funzione della frequenza dell'onda. Tale spettro potrebbe essere espresso mediante una funzione del tipo: $k_0 \left(\dfrac{\nu}{\nu_0}\right)^q$, nella quale ν_0 e k_0 non sono indipendenti.

Egli ha inoltre sperimentalmente trovato che il valore di q più plausibile per accordarsi sulla durata e sul tempo di tragitto del gruppetto d'onde registrato a diverse distanze dal punto di esplosione, risulta uguale a 2.

Poco si conosce sull'assorbimento dell'energia da parte di un mezzo elastico, quindi, sebbene non si possa affermare con sicurezza che tale risultato sia generalizzabile, è verosimile ammettere che i materiali, oltre a presentare le anomalie su esposte, assorbano selettivamente parte dell'energia propagata, secondo uno spettro esprimibile mediante una relazione della forma $k_0 \left(\dfrac{\nu}{\nu_0}\right)^2$.

Dovrà quindi prendersi in considerazione un'onda elementare del tipo:

$$u\,(x\,,t) = B\; e^{-w_1 \eta^2 t}\; e^{-k_1 \eta^2 x}\; e^{i\eta\,(x \pm v_1 t)} \qquad [3]$$

dove essendo:

$$\eta = \frac{2\pi\nu}{v_1} \quad ; \quad k_0\,\frac{\nu^2}{\nu_0^2} = \frac{k_0}{\nu_0^2}\,\frac{\eta^2 v_1^2}{4\pi^2}$$

risulta:

$$k_1 = \frac{k_0}{\nu_0^2} \frac{v_1^2}{4\pi^2}$$

e va preso: $k_1 > 0$ per $x > 0$ e $k_1 < 0$ per $x < 0$.

La [3] esprime il fatto che l'onda elementare è smorzata nello spazio e nel tempo.

Un'onda generata da una perturbazione arbitraria $f(\lambda)$ nell'origine è rappresentabile mediante una relazione del tipo:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) \left\{ \cos\eta\,(\varepsilon - \lambda) + \cos\eta\,(\tau - \lambda) \right\} d\lambda \qquad [4]$$

dove $\varepsilon = x - v_1 t$; $\tau = x + v_1 t$.

Tenendo conto della [3], e posto $\sigma = w_1 t + k_1 x$ si ha:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma\eta^2} f(\lambda) \left\{ \cos\eta\,(\varepsilon - \lambda) + \cos\eta\,(\tau - \lambda) \right\} d\lambda \qquad [5]$$

se la $f(\lambda)$ è pari:

$$u(x,t) = \int_0^{+\infty} A_1\,(x,t,\eta) \left\{ \cos\eta\,\varepsilon + \cos\eta\,\tau \right\} d\eta$$

dove [5']

$$A_1\,(x,t,\eta)\,d\eta = \frac{d\eta}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\sigma\eta^2} f(\lambda) \cos\eta\lambda\, d\lambda$$

rappresenta l'ampiezza delle singole armoniche di frequenza $\nu = \dfrac{v_1\eta}{2\pi}$

Se la $f(\lambda)$ è dispari:

$$u(x,t) = \int_0^{+\infty} A_2\,(x,t,\eta) \left\{ \sin\eta\,\varepsilon + \sin\eta\,\tau \right\} d\eta$$

dove [5'']

$$A_2\,(x,t,\eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\sigma\eta^2} f(\lambda) \sin\eta\lambda\, d\lambda$$

Si può subito rilevare la notevole circostanza che A_1 e A_2 dipendono oltre che dalla frequenza, anche da x e da t, e quindi possono pensarsi come costituite da un sistema di onde di velocità $-\dfrac{w_1}{k_1}$.

Si considerino, per esempio, quattro tipi di perturbazioni nell'origine tenendo conto, per semplicità, dello spostamento u dovuto solo ad onde progressive.

I. - La $f(\lambda)$ è tale che:

$$
\begin{aligned}
f(\lambda) &= 0 \quad \text{per} \quad \lambda < -a \\
f(\lambda) &= B \quad \text{»} \quad -a \leqq \lambda \leqq +a \\
f(\lambda) &= 0 \quad \text{»} \quad \lambda > +a
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Dato che la funzione è dispari applicando le [5″] si ha:

$$A_2(x, t, \pi) = \frac{2B}{\pi} \int_0^a e^{-\sigma \eta^2} \sin \eta \lambda \, d\lambda \tag{7}$$

ossia:

$$A_2(x, t, \eta) = \frac{2B}{\pi \eta} e^{-\sigma \eta^2} (1 - \cos \eta a) \backsimeq \frac{B a^2}{\pi} \eta e^{-\sigma \eta^2} \tag{8}$$

se a è piccolo.

Tenendo presente che:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha s^2} \cos \beta s \, ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{(\alpha)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} \tag{9}$$

$$\int_0^{+\infty} s \, e^{-\alpha s^2} \sin \beta s \, ds = \sqrt{\pi} \frac{\beta}{4(\alpha)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} \tag{10}$$

risulta:

$$u(x, t) = \frac{a^2 B}{4\sqrt{\pi}} \frac{(x - v_1 t)}{(w_1 t + k_1 x)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(x - v_1 t)^2}{4(w_1 t + k_1 x)}} \tag{11}$$

II. - La $f(\lambda)$ è una gaussiana:

$$f(\lambda) = \frac{B}{b} e^{-\frac{\lambda^2}{b^2}} \tag{12}$$

La funzione è pari; applicando le [5′] tenute presenti le [9] e [10] si ha:

$$A_1(x, t, \eta) = \frac{B}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2 \left(\frac{b^2}{4} + \sigma\right)} \tag{13}$$

e quindi:

$$u\ (x\ ,t) = \frac{B}{[4\ (w_1\, t + k_1\, x) + b^2]^{\frac{1}{2}}}\ e^{-\frac{(x - v_1\, t)^2}{4\ (w_1\, t + k_1\, x) + b^2}} \qquad [14]$$

III. - La $f\ (\lambda)$ è una funzione asimmetrica:

$$f\ (\lambda) = \frac{B\,\lambda}{b^3}\ e^{-\frac{\lambda^2}{b^2}} \qquad [15]$$

La funzione è dispari, applicando le [5″] avuto riguardo alle [9] e [10] si ha:

$$A_2\ (x\ ,t\ ,\eta) = \frac{B}{2\sqrt{\pi}}\ \eta\ e^{-\eta^2\left(\frac{b^2}{4} + \sigma\right)} \qquad [16]$$

e quindi:

$$u\ (x\ ,t) = \frac{B\ (x - v_1\, t)}{[4\ (w_1\, t + k_1\, x) + b^2]^{\frac{3}{2}}}\ e^{-\frac{(x - v_1\, t)^2}{4\ (w_1\, t + k_1\, x) + b^2}} \qquad [17]$$

IV. - La $f\ (\lambda)$ è un brusco impulso unidirezionale di larghezza nulla. Questo fatto è rappresentabile mediante la funzione $\delta\ (\lambda)$.
Posto:

$$f\ (\lambda) = B\,\delta\ (\lambda) \qquad [18]$$

$$A\ \ (x\ ,t\ ,\eta) = \frac{B}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta\ (\lambda)\ e^{-\eta^2\sigma}\ \cos\eta\,\lambda\ d\,\lambda \qquad [19]$$

$$A\ \ (x\ ,t\ ,\eta) = \frac{B}{\pi}\ e^{-\eta^2\sigma} \qquad [20]$$

e quindi:

$$u\ (x\ ,t) = \frac{B}{2\sqrt{\pi}}\ \frac{1}{(w_1\, t + k_1\, x)^{\frac{1}{2}}}\ e^{-\frac{(x - v_1\, t)^2}{4\ (w_1\, t + k_1\, x)}} \qquad [21]$$

Per le onde sferiche il calcolo può essere fatto in modo analogo, qualora si ammetta un'onda elementare del tipo:

$$u\ (r\ ,t) = \frac{B}{r}\ e^{-\eta^2\sigma}\ e^{i\,\eta\ (r\,\pm\, v_1\, t)}$$

dove $\sigma = w_1\, t + k_1\, r$.

Le relazioni che si ottengono differiscono evidentemente da quelle stabilite per onde piane, soltanto per il fattore $1/r$.

Le formule [11], [14], [17], [21], formalmente sono analoghe a quelle di Sezawa e di Ricker, ma sostanzialmente differiscono da esse poichè, mentre nella teoria di Sezawa entra soltanto il termine $w_1 t$, e in quella di Ricker soltanto il termine $k_1 x$, nelle relazioni suddette entra la somma dei due termini.

L'onda va continuamente deformandosi e la sua cresta si sposta con velocità che non è costante ma dipende dal tempo e dalla natura della deformazione iniziale.

BIBLIOGRAFIA

(1) JEFFREYS H.: « Monthly Not. Roy. Astronom. Soc. », Londra 1917.

— GUTENBERG B.: *Die Viskositat und die innere Reibung im Erdinnern.* « Handbuch der Geophysik », Band II, Lief I°.

— HOSALI N. M.: *On Seismic Waves in a Visco-Elastic Earth.* « Proceedings of the Royal Soc. of London », Series A, v. CIV, 1923.

— CALOI P.: *Sull'attrito interno della crosta terrestre.* « Ric. Scient. », gennaio 1943, n. 1, p. 4.

(2) SEZAWA K.: *On the Decay of Waves in Visco-Elastic Solid Bodies.* « Bull. Earth. Res. Instit., Tokyo Imp. Univ., 1927.

(3) RICKER N.: *The form and nature of seismic waves and the structure of seismograms.* « Geophysics », v. V, 1940.