PUBBLICAZIONI
DELL' ISTITUTO NAZIONALE DI GEOFISICA

N. 110

PAOLO EMILIO VALLE

Sulla rifrazione di onde piane elementari in mezzi firmo-viscosi

ROMA
ANNO 1945

Estratto da « *Ricerca Scientifica e Ricostruzione* »

Anno 15° - N. 2 - Agosto 1945

ROMA - SCUOLA TIPOGRAFICA PIO X - VIA DEGLI ETRUSCHI, 7-9 - ROMA

È noto che la propagazione delle onde sismiche nell'interno della terra, avviene attraverso superficie di discontinuità.

Fatta eccezione dei sismogrammi relativi a sismi con ipocentro nel primo strato della crosta terrestre, le cui onde dirette sono registrabili da osservatori situati in un raggio della distanza epicentrale di 200-300 Km., in ogni altro caso le onde sismiche spaziali, registrate nei sismogrammi, sono costituite da onde riflesse e rifratte una o più volte in corrispondenza delle superficie interne di discontinuità e della superficie esterna della terra.

I punti della superficie di separazione di due mezzi fisicamente diversi, raggiunti da un'onda sismica, si comportano come vere sorgenti di perturbazione, dando origine ad onde riflesse e rifratte, la cui natura è indipendente da quella dell'onda incidente; soltanto in casi particolari quest'ultima può dare origine ad onde riflesse e rifratte esclusivamente della stessa natura.

Nel caso più generale, un'onda incidente può dare origine a quattro onde, due riflesse e due rifratte, longitudinali e trasversali.

Si comprende come sia della massima importanza per la sismologia, poter stabilire come l'energia associata all'onda incidente, si ripartisca fra le onde riflesse e rifratte.

Tenendo conto del fatto che alla superficie di separazione di due mezzi, devono essere soddisfatte le condizioni di continuità cinematica e dinamica, Knott, Zoeppritz ed altri si sono occupati del problema, nel semplice caso che l'onda incidente sia sinusoidale e piana; altre teorie prevedono casi più complicati: notevoli quella di Cagnard relativa alla rifrazione di particolari onde sferiche e quelle di Sezawa riguardanti il passaggio di onde sismiche in mezzi più volte stratificati.

Le sopracitate teorie sono state sviluppate con l'ipotesi che i mezzi a contatto siano perfettamente elastici; è invece noto che i materiali costituenti la crosta terrestre, si comportano in modo diverso, a seconda che essi siano sottoposti all'azione di forze lungamente applicate o di breve durata. Tali materiali inoltre, sotto l'azione di una forza, non riprendono la posizione primitiva al cessare della causa perturbante, ma vi pervengono dopo un certo tempo. Questa proprietà, dipendente *dall'attrito interno,* è detta firmo-viscosità. J. Larmoi e

H. Jeffreys hanno proposto la relazione: $s = F/\mu - \tau_2 \, ds/dt$, dove s è la distorsione, F la forza agente, μ il modulo di distorsione; sarebbe facile mostrare che τ_2 rappresenta il tempo in cui la deformazione si riduce a $1/e$ del suo valore, quando la tensione è rimossa.

Ricerche di carattere teorico-sperimentale hanno posto in evidenza che la relazione di Larmoi e Jeffreys è con buona approssimazione verificata e permette la spiegazione di notevoli fenomeni, riscontrati nella propagazione delle onde sismiche.

Non risulta però che sia stata rispresa la trattazione del problema della rifrazione, sotto l'ipotesi della firmo-viscosità dei mezzi a contatto; ho ritenuto quindi utile rifare la teoria della rifrazione, per il semplice caso di onde incidenti monocromatiche e piane, sotto tale ipotesi, nell'intento di stabilire le formule che permettano di calcolare la ripartizione dell'energia associata all'onda incidente fra le onde riflesse e rifratte, e di mettere in evidenza qualcuna delle modalità con le quali avviene la rifrazione.

In un mezzo firmo-viscoso sono possibili due tipi di onde elementari longitudinali e trasversali: onde la cui ampiezza decresce esponenzialmente col tempo e che si possono chiamare smorzate, onde la cui ampiezza decresce esponenzialmente con la distanza e che si possono chiamare assorbite. Se si suppone data la pulsazione, si trova formalmente che sono possibili due onde smorzate progressive e due regressive, mentre è possibile una sola onda assorbita progressiva e una regressiva. In entrambi i casi i coefficienti di smorzamento, di assorbimento, le velocità e quindi le lunghezze d'onda, sono funzioni della pulsazione.

Ho studiato la rifrazione di tali onde elementari assumendo come superficie di separazione dei due mezzi il piano xy di un sistema d'assi cartesiano e ho stabilito le formule che consentono di calcolare l'ampiezza e i parametri che caratterizzano le onde riflesse e rifratte in funzione degli analoghi parametri dell'onda incidente, nel caso che quest'ultima sia piana longitudinale, trasversale con vibrazioni normali al piano d'incidenza, trasversale con vibrazioni contenute nel piano d'incidenza.

In tutti e tre i casi avviene in generale che: 1° Le onde riflesse e rifratte sono sfasate rispetto a quella incidente. 2° Per le onde smorzate, oltre allo smorzamento, che si conserva identico per tutte le onde secondarie, è presente un assorbimento lungo l'asse z, eccezione fatta per l'onda riflessa della stessa natura dell'onda incidente. 3° Per le onde assorbite, il coefficiente di assorbimento delle onde secondarie, uguale lungo tutti e due gli assi per l'onda incidente e riflessa della stessa natura dell'onda incidente, è diverso lungo i due assi. 4° Sia nel caso di onde smorzate che nel caso di onde assorbite, i parametri che caratterizzano le onde riflesse e rifratte dipendono dalle costanti elastiche di entrambi i mezzi a contatto.

Seguono alcuni sviluppi matematici.

* * *

Le equazioni del moto nei mezzi firmo-viscosi per le onde longitudinali e trasversali, in assenza di forze esterne sono:

$$(\lambda + \mu)\, \Delta_2\, \Theta + (\lambda' + 2\,\mu')\, \frac{\partial}{\partial t}\, \Delta_2\, \Theta = \varrho\, \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} \qquad 1)$$

$$\mu\, \Delta_2\, \omega_i + \mu'\, \frac{\partial}{\partial t}\, \Delta_2\, \omega_i = \varrho\, \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial t^2} \qquad 1')$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

dove λ' e μ' sono due costanti che dipendono dal coefficiente di attrito interno $\mu\, \tau_2$ del mezzo e precisamente si ha: $\mu' = \mu\, \tau_2$ e $\lambda' = -\, 2/3\, \mu'$.

Posto: $\Theta = Ae^{\,j\,(pt\, -\, ax\, -\, by\, -\, cz)}$ e $\omega_i = A_i e^{\,j\,(pt\, -\, ax\, -\, by\, -\, cz)}$

si ha per le onde longitudinali:

$$p^2 - (j m' p + m)\,(a^2 + b^2 + c^2) = 0 \qquad 2)$$

e per le trasversali:

$$p^2 - (j n' p + n)\,(a^2 + b^2 + c^2) = 0 \qquad 2')$$

dove $j = \sqrt{-1}$, $m' = \dfrac{\lambda' + 2\,\mu'}{\varrho}$, $n' = \dfrac{\mu'}{\varrho}$, $m = \dfrac{\lambda + 2\,\mu}{\varrho}$, $n = \dfrac{\mu}{\varrho}$

Se si suppone p complesso e a, b, c reali, detti α β e γ i coseni direttori della normale al fronte d'onda ed L la lunghezza d'onda, si ha:

$$a = \frac{2\,\pi}{L}\,\alpha\ ,\quad b = \frac{2\,\pi}{L}\,\beta\ ,\quad c = \frac{2\,\pi}{L}\,\gamma$$

e quindi, per esempio, dalla 2'):

$$p = \pm\, \frac{2\pi}{L} \sqrt{n - \frac{\pi^2\, n'^2}{L^2}} + \frac{2\,\pi^2\, n'}{L^2}\, j \qquad 3)$$

La velocità di propagazione (di fase) è data da:

$$\pm \sqrt{n - \frac{\pi^2\, n'^2}{L^2}} \qquad 4)$$

il cui doppio segno è in relazione alla possibile esistenza di un'onda progressiva e una regressiva smorzate di data lunghezza d'onda, il cui coefficiente di smorzamento vale:

$$h = \frac{2\pi^2 n'}{L^2} \tag{5)}$$

La parte reale di p costituisce la pulsazione vera dell'onda.

Posto:

$$p' = \frac{2\pi}{L}\sqrt{n - \frac{\pi^2 n'^2}{L^2}} \tag{6)}$$

si ha:

$$p'^2 L^4 - 4\pi^2 n L^2 + 4\pi^4 n'^2 = 0 \tag{7)}$$

d'onde:

$$L^2 = \frac{2\pi^2}{p'^2}\left(n \pm \sqrt{n^2 - n'^2 p'^2}\right) \tag{7')}$$

Per la realità di L deve essere $L^2 > 0$ e inoltre:

$$p' \leq \frac{n}{n'} \tag{8)}$$

Ambedue le soluzioni della 7') soddisfano la condizione $L^2 > 0$ quando sia verificata la 8).

Si conclude che nel caso di onde smorzate, mentre per una data lunghezza di onda, soddisfacente la condizione $n \geq \pi^2 n'^2/L^2$, è possibile una sola pulsazione data dalla 6), e quindi un'onda progressiva e un'onda regressiva il cui coefficiente di smorzamento è dato dalla 5), per una data pulsazione soddisfacente la 8) sono possibili due onde progressive e due regressive smorzate, di lunghezza d'onda, velocità (di fase) e coefficiente di smorzamento dati dalle seguenti espressioni:

$$\left.\begin{aligned} L_1\,,\,L_2 &= \frac{\pi\sqrt{2}}{p'}\sqrt{n \pm \sqrt{n^2 - n'^2 p'^2}} \\ v_1\,,\,v_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{n \pm \sqrt{n^2 - n'^2 p'^2}} \\ h_1\,,\,h_2 &= \frac{n' p'^2}{n \pm \sqrt{n^2 - n'^2 p'^2}} \end{aligned}\right\} \tag{9)}$$

Si osservi inoltre che per $p' \to 0$, $L_1 \to \infty$, $L_2 \to \dfrac{\pi n'}{\sqrt{n}}$, $v_1 \to \sqrt{n}$,

$v_2 \to 0$, $h_1 \to 0$, $h_2 \to \dfrac{2n}{n'}$, e per $p' \to \dfrac{n}{n'}$, $L_1 \to L_2 \to \dfrac{\pi n' \sqrt{n}\,\sqrt{2}}{n}$,

$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{n}$, $h_1 \rightarrow h_2 \rightarrow \frac{n}{n'}$. Quindi per $p' \rightarrow \frac{n}{n'}$, le due onde tendono ad identificarsi.

Se si suppone p reale e a, b, c complesse, posto:

$$a = \left(\frac{2\pi}{L} - jk\right)\alpha \quad , \quad b = \left(\frac{2\pi}{L} - jk\right)\beta \quad , \quad c = \left(\frac{2\pi}{L} - jk\right)\gamma \qquad 10)$$

si ha p.es. dalla 2'):

$$\left(\frac{2\pi}{L} - jk\right)^2 = \frac{p^2}{n + jn'p}$$

da cui, dato che deve essere $L^2 > 0$,

$$L^2 = \frac{16\pi^2 (n^2 + n'^2 p^2)}{2n'^2 p^4}\left(-n + \sqrt{n^2 + n'^2 p^2}\right)$$

e quindi nel caso di onde assorbite si ha, per una data pulsazione, una sola lunghezza d'onda per onde progressive e regressive:

$$L = \frac{4\pi}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{n^2 + n'^2 p^2}\sqrt{\sqrt{n^2 + n'^2 p^2} - n}}{n' p^2} \qquad 11)$$

inoltre:

$$k = \frac{p}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\sqrt{n^2 + n'^2 p^2} - n}}{\sqrt{n^2 + n'^2 p^2}} \qquad 12)$$

$$v = \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{n^2 + n'^2 p^2}\sqrt{\sqrt{n^2 + n'^2 p^2} - n}}{n' p} \qquad 13)$$

Al crescere di p il coefficiente d'assorbimento e la velocità (di fase) crescono, mentre la lunghezza d'onda decresce. Per $p \rightarrow 0$, $L \rightarrow \infty$, $k \rightarrow 0$, $v \rightarrow \sqrt{n}$.

Si consideri p. es. un'onda piana trasversale, con vibrazioni normali al piano d'incidenza, che incida sulla superficie di separazione di due mezzi firmo-viscosi.

Per ragioni di simmetria esiste soltanto un'onda riflessa e un'onda rifratta trasversali, con vibrazioni normali al piano di incidenza. Le componenti dello spostamento sono:

$$u = 0 \;,\; v = B_i\, e^{j(pt - ax - c_2 z)} \;,\; w = 0 \quad \ldots\ldots \text{ onda incidente}$$

$$u = 0 \;,\; v = B_r\, e^{j(pt - ax + c_2 z)} \;,\; w = 0 \quad \ldots\ldots \text{ » riflessa} \qquad 14)$$

$$u = 0 \;,\; v = B_d\, e^{j(pt - ax - c_3 z)} \;,\; w = 0 \quad \ldots\ldots \text{ » rifratta}$$

Le condizioni di continuità, alla superficie di separazione dei due mezzi, sono:

$$(\sum v)_1 = (\sum v)_2$$

$$(\sum T_{yz})_1 = (\sum T_{yz})_2$$

dove

$$T_{yz} = \mu \frac{\partial v}{\partial z} + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial z} .$$

Introducendo nelle precedenti equazioni l'espressione di v e risolvendo il sistema che ne deriva, si ha, con evidente significato dei simboli:

$$B_r = \frac{1 - \dfrac{c_3}{c_2} \dfrac{(j\mu_2 - p\mu'_2)}{(j\mu_1 - p\mu'_1)}}{1 + \dfrac{c_3}{c_2} \dfrac{(j\mu_2 - p\mu'_2)}{(j\mu_1 - p\mu'_1)}} B_i$$

$$B_d = \frac{2}{1 + \dfrac{c_3}{c_2} \dfrac{(j\mu_2 - p\mu'_2)}{(j\mu_1 - p\mu'_1)}} B_i \qquad 15)$$

Le 15) mostrano che le ampiezze delle onde riflessa e rifratta rispettivamente, sono, in generale, complesse. Si potrà quindi scrivere:

$$B_r = B_{or}\, e^{j\varphi_{rt}} , \; B_d = B_{od}\, e^{j\varphi_{dt}}$$

da cui consegue che l'onda riflessa e l'onda rifratta sono sfasate rispetto all'onda incidente rispettivamente degli angoli. φ_{rt} e φ_{dt}.

Nel primo mezzo, per l'onda incidente e riflessa, deve essere:

$$p^2 - (j\, n'_1 p + n_1)\, (a^2 + c_2^{\,2}) = 0 \qquad 16)$$

e nel secondo mezzo, per l'onda rifratta:

$$p^2 - (j\, n'_2 p + n_2)\, (a^2 + c_3^{\,2}) = 0 \qquad 16')$$

da quest'ultima si ha:

$$c_3 = \sqrt{- a^2 + \frac{p^2}{n_2 + j\, n'_2 p}} \qquad 17)$$

Il coefficiente risulterà in generale complesso e si potrà porre:

$$c_3 = c'_3 - j\, c''_3$$

Si deve ora distinguere il caso dell'onda incidente smorzata dal caso dell'onda incidente assorbita.

Si supponga p complesso, a e c_2 reali e siano dati a, c_2 B_i.

La pulsazione p si ottiene subito dalla 16) e si ha:

$$p = \frac{1}{2} \sqrt{\{4 n_1 - n'^2_1 (a^2 + c_2^2)\} (a^2 + c_2^2)} + j \frac{n'_1 (a^2 + c^2_2)}{2}$$

dove si tiene conto soltanto del segno positivo dinanzi al radicale perchè si tratta di un'onda progressiva.

Introducendo il valore di p nella 17) si ottiene la parte reale e il coefficiente dell'immaginario di c_3 (Si omettono per brevità le formule esplicite).

Risulta da quanto precede che l'onda rifratta la quale ha lo stesso coefficiente di smorzamento $h = n'_1 (a^2 + c_2^2)/2$dell'onda incidente risulta assorbita lungo l'asse z.

Il coefficiente di assorbimento è costituito dal coefficiente dell'immaginario di c_3.

Calcolato c_3 è facile risalire alla lunghezza d'onda dell'onda rifratta e agli altri enti che caratterizzano un'onda.

Si ha p. es.:

$$v_{dt} = \frac{p'}{\sqrt{a^2 + c'^2_3}}$$

Sia ora p reale, a e c_2 complesse e si suppongano dati: B_i, l'angolo d'incidenza $\widehat{it}$ e p.

posto:

$$\begin{aligned}
a &= \left(\frac{2\pi}{L_{it}} - j\, k_{it}\right) \sin \widehat{it} = a' - j\, a'' \\
c_2 &= \left(\frac{2\pi}{L_{it}} - j\, k_{it}\right) \cos \widehat{it} = c'_2 - j\, c''_2 \\
a &= \left(\frac{2\pi}{L_{dt}} - j\, k_{dt}\right) \sin \widehat{dt} = a' - j\, a'' \\
c_3 &= \left(\frac{2\pi}{L_{dt}} - j\, k'_{dt}\right) \cos \widehat{dt} = c'_3 - j\, c_3''
\end{aligned} \qquad 18)$$

Sostituendo nella 17) l'espressione data dalla prima delle precedenti si ottiene c_3 (Non si riporta la formula esplicita per brevità). Si ha:

$$L_{it} = \frac{4\pi}{\sqrt{2}} \; \frac{\sqrt{n^2_1 + n'^2_1 p} \; \sqrt{\sqrt{n^2_1 + n'^2_1 p^2} - n_1}}{n'_1 p^2}$$

$$k_{it} = \frac{p}{\sqrt{2}} \; \frac{\sqrt{\sqrt{n^2_1 + n'^2_1 p^2} - n_1}}{\sqrt{n^2_1 + n'^2_1 p^2}}$$

In base alle 18):

$$\frac{\sin \widehat{it}}{\sin \widehat{dt}} = \frac{L_{it}}{L_{dt}} = \frac{v_{it}}{v_{dt}} = \frac{\sqrt{a'^2 + c'^2_3}}{\sqrt{a'^2 + c'^2_2}}$$

$$k_{dt} = \frac{\sin \widehat{it}}{\sin \widehat{dt}}\, k_{it} \quad \text{dove : } \sin \widehat{dt} = \frac{a'}{\sqrt{a'^2 + c'^2_3}} \qquad 19)$$

inoltre :

$$k'_{dt} = \frac{c''_3}{\cos \widehat{dt}}$$

ossia :

$$k'_{dt} = \frac{c''_3}{c'_3} \sqrt{a'^2 + c'^2_3} \qquad 20)$$

Dalla 19) e 20) risulta che, mentre nel primo mezzo, per l'onda incidente e riflessa, il coefficiente di assorbimento è uguale lungo ambedue gli assi di riferimento, per l'onda rifratta nel secondo mezzo ciò non accade.

Ringrazio il Prof. G. Wick per i consigli datimi.

Roma — *Istituto Nazionale di Geofisica* — Ottobre 1944.