PUBBLICAZIONI
DELL' ISTITUTO NAZIONALE DI GEOFISICA

N. 114

PAOLO EMILIO VALLE

# Sull' equazione della velocità delle onde di Rayleigh

ROMA
ANNO 1945

Estratto da « *Ricerca Scientifica e Ricostruzione* »

Anno 15° - N. 6 - Dicembre 1945

ROMA - TIPOGRAFIA PIO X - VIA DEGLI ETRUSCHI, 7-9 - ROMA

È noto che

$$(u, v, w) = \text{grad}\, \Psi + \text{rot}\,(L, M, N) \tag{1}$$

dove $\Psi$, L, M ed N soddisfano, quando si tenga conto dell'attrito interno, le equazioni differenziali:

$$m\,\Delta_2 \Psi + m' \frac{\partial}{\partial t} \Delta_2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

$$n\,\Delta_2 (L, M, N) + n' \frac{\partial}{\partial t} \Delta_2 (L, M, N) = \frac{\partial}{\partial t^2} (L, M, N) \tag{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0 \ .$$

Posto:

$$\Psi = A_1 e^{-\alpha z} \Gamma \quad ; \quad L = A_2 e^{-\alpha' z} \Gamma \quad ; \quad M = A_3 e^{-\alpha' z} \Gamma \quad ; \quad N = A_4 e^{-\alpha' z} \Gamma$$

dove $\Gamma = e^{j(pt - fx - gy)}$, dalle (2) risulta:

$$\alpha'^2 = l^2 - \frac{p^2}{m + jm'p} \quad ; \quad \alpha'^2 = l^2 - \frac{p^2}{n + jn'p} \quad ; \; jf A_2 + jg A_3 + \alpha' A_4 = 0 \tag{3}$$

con $l^2 = f^2 + g^2$.

Tenendo conto che per $z = 0$, debbono essere nulle le tensioni $T_1$, $T_2$ ed $N_3$, si hanno le seguenti equazioni:

$$\begin{gathered} 2jg\alpha A_1 - fg A_3 + (g^2 + \alpha'^2) A_2 - jf\alpha' A_4 = 0 \\ 2jf\alpha A_1 + jg\alpha' A_4 - (\alpha'^2 + f^2) A_3 + gf A_2 = 0 \\ (\lambda + j\lambda' p)(\alpha^2 - l^2) A_1 + 2(\mu + j\mu' p)(\alpha^2 A_1 + jf\alpha' A_3 - jg\alpha' A_2) = 0 \ . \end{gathered} \tag{4}$$

Ove si ponga:

$$A_2 = K A_1 \quad ; \quad A = H A_1 \quad ; \quad A_4 = S A_1$$

si ricava dalla terza delle (3) e dalle prime due delle (4):

$$K = \frac{-2j\alpha g}{\alpha'^2 + l^2} \quad ; \quad H = \frac{2j\alpha f}{\alpha'^2 + l^2} \quad ; \quad S = 0 \; .$$

Introducendo i valori di $A_2$, $A_3$ e $A_4$ nell' ultima delle (4), avuto riguardo alle prime due delle (3), si ottiene in definitiva:

$$16\, l^4 \left(l^2 - \frac{p^2}{m + jm'p}\right)\left(l^2 - \frac{p^2}{n + jn'p}\right) = \left(2\, l^2 - \frac{p^2}{n + jn'p}\right)^4 \; . \tag{5}$$

Il rapporto $p^2/l^2$ non è indipendente da $p$ ed è generalmente complesso.

Se si suppone $p$ data e reale, risulterà: $l = 2\pi/L - jk$, dove L è la lunghezza d'onda e $k$ il coefficiente di assorbimento, mentre se si suppone data e reale $l = 2\pi/L$, risulterà: $p = p + jp''$, dove $p'$ è la pulsazione dell'onda e $p''$ il coefficiente di smorzamento.

Ponendo nella (5) $m' = n' = 0$ si ottiene la classica equazione di Rayleigh.

Mi riservo di ritornare sulla questione in altra sede.

Roma, Istituto Nazionale di Geofisica, 15 novembre 1945.