

PUBBLICAZIONI
DELL'ISTITUTO NAZIONALE DI GEOFISICA

N. 146

GUIDO PANNOCCHIA

Sesse del Lago d'Orta

ROMA 1948

Estratto da *Annali di Geofisica*

Vol. I, n. 2, 1948, pag. 253

STAMPATO DALL'ISTITUTO GRAFICO TIBERINO (ROMA - VIA GAETA 14)

In questo lavoro si determinano le sesse riguardanti l'intero lago d'Orta con due differenti metodi: quello di Defant e quello di Hidaka rinviando a data posteriore e la determinazione di sesse riguardanti parti di lago e la individuazione e confronto sperimentali delle sesse determinate teoricamente. Per la parte bibliografica inerente al lavoro e per i chiarimenti sui metodi usati si fa riferimento all'analogo lavoro sul lago di Garda di P. Caloi ⁽¹⁾ limitandoci qui alle indicazioni essenziali.

a) *Dati generici relativi al lago d'Orta.*

Secondo P. Landini ⁽²⁾: superficie totale 18 km²; latitudine nord 45° 49'; longitudine ovest di Roma 4° 3'; lunghezza secondo la linea mediana 13,4 km; larghezza massima 2,5 km; larghezza media 1400 m; profondità massima 143 m; questa si trova a 147 m sul livello del mare.

b) *Sesse uni-bi e tri-nodale col metodo di Defant.*

(I dati numerici usati sono stati rilevati da una carta geografica dell'Istituto De Agostini al 50.000).

Con la formula di Merian:

$$T = \frac{2l}{\sqrt{gh_0}} \quad [1]$$

dove l indica la lunghezza del lago ($l \doteq 13.300$ m) e h_0 la profondità media ($h_0 = 69,39$ m) si determina in prima approssimazione il periodo per la sessa uninodale; esso risulta $T = 16^m,99 \simeq 17^m$.

Successivamente, praticate un certo numero di sezioni verticali (32 nel nostro caso) normali alla linea di valle (linea congiungente i punti di massima profondità), determinate di esse le larghezze alla superficie del lago e le aree, determinate le aree parziali del lago comprese in superficie tra una sezione e la successiva, con la seconda delle seguenti formule di Defant:

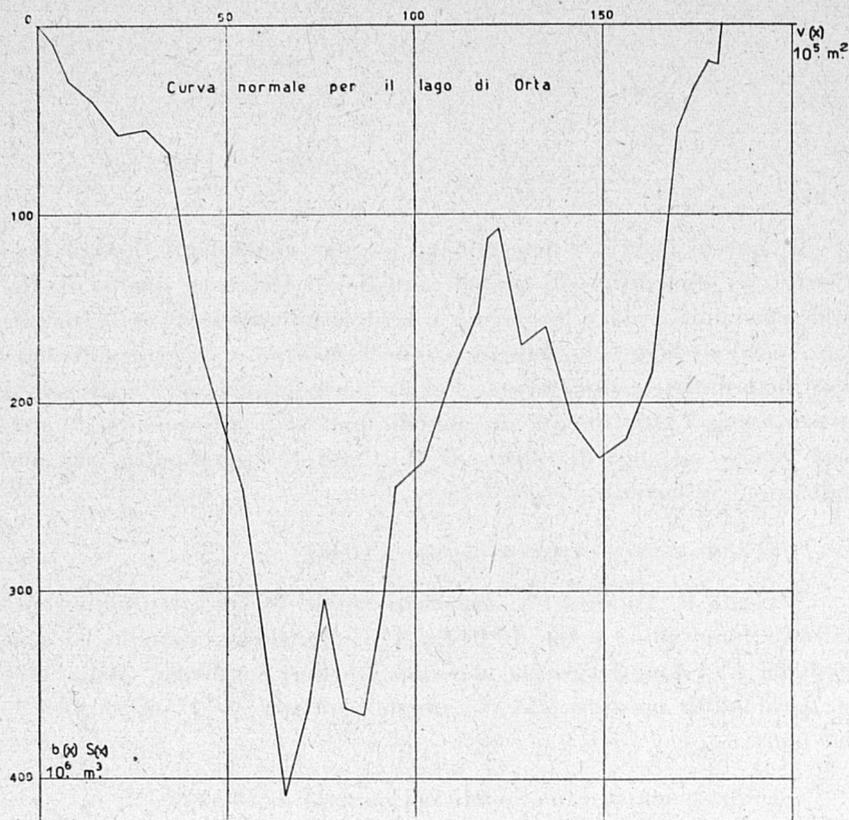


Fig. 1

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \Delta \eta_0 = \frac{4\pi^2}{g T^2} 2\xi_0 \Delta x \\ 2\xi_0 = -\frac{1}{S(x)} \int_0^x 2 \eta_0 b(x) dx, \end{array} \right. \quad [2]$$

dove i simboli hanno i seguenti significati: $2\eta_0$ ampiezza del moto in senso verticale, cui si attribuisce inizialmente un valore arbitrario, ad esempio 100; ξ_0 ampiezza del moto in senso orizzontale; $S(x)$ area della sezione verticale in considerazione, $b(x)$ larghezza di detta sezione alla superficie del lago; Δx intervallo fra una sezione e la successiva (nel nostro caso ogni 500 m, tranne in alcuni tratti di lago meno regolari, dove Δx vale 250 m); x valutato lungo la linea

TABELLA N. 1

Sezioni	x m	S(x) (*) 10 ⁸ cm ²	b(x) m	b(x) S(x) m ³ 10 ⁶	v(x) parziale 10 ⁸ cm ²	v _n (x) m ² 10 ³	Z = $\frac{v_n(x)}{a}$, (a = area tot. del lago)	Δx 10 ⁴ cm
0	0	0	0	0			0	
1	500	0,89675	850	7,622375	32,50	325,00	0,01795	5
2	1000	2,02000	1462,50	29,542500	45,00	775,00	0,04280	»
3	1500	3,13500	1300	40,755000	65,00	1425,00	0,07870	»
4	2000	3,99000	1460	58,254000	67,50	2100,00	0,11597	»
5	2500	4,05000	1375	55,687500	72,50	2825,00	0,15601	»
6	3000	4,30000	1570	67,510000	62,50	3450,00	0,19053	»
7	3500	9,05000	1950	176,475000	92,50	4375,00	0,24161	»
8	4000	10,77500	2275	245,131250	100,00	5375,00	0,29684	»
9	4250	13,53750	2375	321,515625	54,00	5915,00	0,32666	2,5
10	4500	16,62500	2460	408,975000	62,50	6540,00	0,36118	»
11	4750	16,15000	2242,50	362,163750	60,00	7140,00	0,39431	»
12	5000	14,35000	2125	304,937500	52,00	7660,00	0,42303	»
13	5250	17,57500	2062,50	362,484375	45,00	8110,00	0,44788	»
14	5500	18,82500	2000	376,500000	50,00	8610,00	0,47549	»
15	5750	17,17500	1825	313,443750	48,75	9097,50	0,50242	»
16	6000	15,45000	1587,50	245,268750	40,00	9497,50	0,52451	»
17	6500	14,90000	1550	230,950000	72,50	10222,50	0,56454	5
18	7000	13,42500	1375	184,593750	77,50	10997,50	0,60734	»
19	7500	11,37500	1350	153,562500	66,25	11660,00	0,64393	»
20	7750	9,10000	1245	113,295000	27,50	11935,00	0,65912	2,5
21	8000	9,85000	1087,50	107,118750	30,00	12235,00	0,67569	»
22	8500	13,60000	1245	169,320000	58,75	12822,50	0,70813	5
23	9000	11,37500	1400	159,250000	66,25	13485,00	0,74472	»
24	9500	15,30000	1375	210,375000	67,25	14157,50	0,78186	»
25	10000	15,57500	1475	229,731250	70,00	14857,50	0,82052	»
26	10500	15,22500	1440	219,240000	72,50	15582,50	0,86055	»
27	11000	13,40000	1370	183,580000	70,00	16282,50	0,89921	»
28	11500	5,65000	980	55,370000	67,50	16957,50	0,93649	»
29	12000	4,20000	805	33,810000	41,25	17370,00	0,95927	»
30	12500	2,76250	675	18,646875	40,00	17770,00	0,98136	»
31	13000	0,48000	420	20,160000	27,50	18045,00	0,99655	»
32	13300	0	0		6,25	18107,50	1,00000	3

(*) Le S(x) nei calcoli con il met. di Hidaka vengono espresse in m² 10².

di valle; avendo scelto per il lago in esame come origine delle x l'estremo sud del lago, si calcola il 2ξ₀ in quanto è:

$$q = \int_0^{x_1} 2\eta_0 b(x_1) dx = 2\eta_0 \int_0^{x_1} b(x_1) dx = 2\eta_0 v(x_1)$$

(dove v(x₁) rappresenta l'area parziale del lago) la quantità d'acqua che transita attraverso la prima sezione per provocare lo spostamento

assegnato $2\eta_0$; questa divisa per $S(x_1)$ dà $2\xi_0$. Con la prima delle [2] si determina il $2\Delta\eta_0$ (variazione dello spostamento nel passaggio dalla sezione 0 alla prima sezione); si prosegue poi di sezione in sezione usando di volta in volta il nuovo $2\eta_i$ che via via si determina. (Nel passaggio da una sezione alla successiva per un numero abbastanza elevato di sezioni si ritiene che l'entità dello spostamento non vari o quanto meno abbia un andamento lineare).

In corrispondenza dell'ultima sezione (di area nulla) se il periodo T trovato con la formula di Merian ed usato è esatto la q (quantità d'acqua transitante) dovrebbe essere nulla. Non avvenendo ciò per $q > 0$ il T va diminuito; si procede in modo analogo con il nuovo T ; se con questo $q < 0$ il valore di T cercato è compreso fra i due. Si è ottenuto per la uninodale il valore di $T = 14^m, 6$.

Si procede in modo del tutto analogo per la binodale e trinodale; si sono trovati i valori $T = 9^m, 2$ per la binodale; $T = 5^m, 8$ per la trinodale.

Nella precedente tabella n. 1 si riportano i principali dati usati con ambedue i metodi nominati; nelle tabelle n. 2, 3 e 4 quelli relativi ai calcoli con il metodo di Defant.

c) *Sesse uni-bi e tri-nodali con il metodo di Hidaka* (1).

Nell'equazione di Chrystal:

$$\sigma(v) \frac{d^2 u}{dv^2} + \frac{4\pi^2}{T^2 g} u = 0 \quad [3]$$

i simboli hanno i seguenti significati: v area superficiale della parte di lago compresa tra una estremità di esso ed una generica sezione: $0 \leq v \leq a$ essendo a l'area totale; $\sigma(v)$, prodotto dell'area di una generica sezione per la sua larghezza in superficie, per cui $\sigma(0) = \sigma(a) = 0$; T periodo di una sessa; u funzione di v avente con l'ampiezza della sessa la relazione

$$\xi = - \frac{du}{dv}, \quad [4]$$

con le condizioni ai limiti $u(0) = u(a) = 0$. Posto $z = \frac{v}{a}$ e $\sigma(z) = h\gamma(z)$, la [3] diventa:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{\lambda}{\gamma(z)} u = 0 \quad \text{con} \quad \lambda = \frac{4\pi^2 a^2}{T^2 g h} \quad [5]$$

e le condizioni ai limiti: $u(0) = 0, u(1) = 0$.

TABELLA N. 2 (*) : $T = 14^m,6 = 876^s$ $\alpha = \frac{4\pi^2}{gT^2}$

N°	$\alpha \Delta x$ 10 ⁻⁴	$q = (2 \eta_i + 2 \Delta \eta_i) v(x)$ 10 ¹⁰ cm ³	$2 \xi_i = -\frac{q}{S(x)}$ 10 ³ cm	$2 \Delta \eta_i$ cm	$2 \eta_i + 2 \Delta \eta_i$ cm
0					100
1	26,221	32,5	- 3,624	- 9,50	90,50
2	»	73,2	- 3,624	- 9,50	81,00
3	»	125,8	- 4,013	- 10,52	70,48
4	»	173,4	- 4,346	- 11,40	59,08
5	»	216,2	- 5,338	- 14,00	45,08
6	»	244,4	- 5,684	- 14,90	30,18
7	»	272,3	- 3,009	- 7,89	22,29
8	»	294,6	- 2,734	- 7,17	15,12
9	13,111	302,8	- 2,237	- 2,93	12,19
10	»	310,4	- 1,867	- 2,45	9,74
11	»	316,2	- 1,958	- 2,57	7,17
12	»	319,9	- 2,229	- 2,92	4,25
13	»	321,8	- 1,831	- 2,40	1,85
14	»	322,7	- 1,714	- 2,25	- 0,40
15	»	322,5	- 1,878	- 2,46	- 2,86
16	»	321,4	- 2,080	- 2,73	- 5,59
17	26,221	317,4	- 2,130	- 5,58	- 11,17
18	»	308,7	- 2,299	- 6,03	- 17,20
19	»	297,3	- 2,614	- 6,85	- 24,05
20	13,111	290,7	- 3,194	- 4,19	- 28,24
21	»	282,2	- 2,865	- 3,76	- 32,00
22	26,221	263,4	- 1,937	- 5,08	- 37,08
23	»	238,8	- 2,099	- 5,50	- 42,58
24	»	210,2	- 1,374	- 3,60	- 46,18
25	»	177,9	- 1,142	- 2,99	- 49,17
26	»	142,3	- 0,935	- 2,45	- 51,62
27	»	106,2	- 0,792	- 2,08	- 53,70
28	»	70,0	- 1,239	- 3,25	- 56,95
29	»	46,5	- 1,107	- 2,90	- 59,85
30	»	22,6	- 0,818	- 2,14	- 61,99
31	»	5,6	- 1,167	- 3,06	- 65,05
32		1,5	-	-	-

Sessa uninodale;

$T = 14^m, 6$;

l'ultima colonna dà l'andamento delle ampiezze;

il nodo cade tra la sez. 13 e 14 e a calcoli fatti alla distanza di 5455 m dall'estremo sud del lago.

[il valore di T usato si può ritenere sufficientemente approssimato, scartando il q di poco dallo zero].

(*) Si riportano le tabelle dei calcoli solo per il valore di T che si è ritenuto sufficientemente approssimato.

L'integrazione della [5] fatta col metodo delle variazioni di Ritz conduce alla relazione

$$\sum_{i=0}^m \left[\frac{(i+1)(j+1)}{i+j+1} - \frac{(i+2)(j+1)+(i+1)(j+2)}{i+j+2} + \frac{(i+2)(j+2)}{i+j+3} - \lambda I_{i+j} \right] A_i = 0 \quad [6]$$

($j=0,1,2,\dots,m$)

dove:

$$I_{i+j} = \int_0^1 \frac{z^2(1-z)^2 z^{i+j}}{\gamma(z)} dz \quad [7]$$

che può essere calcolato numericamente se $\gamma(z)$ è nota, cioè se $\sigma(z)$ è una funzione semplice di z . La *curva normale* ottenuta usando per ascisse le v e per ordinate le $\sigma(v)$ (fig. 1), nel caso in esame ha andamento irregolare: la $\sigma(z)$ non è quindi funzione semplice di z . Come per il lago di Garda è quindi necessaria l'integrazione numerica dell'integrale [7] (tabella n. 5). Scrivendo le [6] dettagliatamente nel caso $m=2$, si ottengono le tre equazioni:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{3} - I_0\lambda \right) A_0 + \left(\frac{1}{6} - I_1\lambda \right) A_1 + \left(\frac{1}{10} - I_2\lambda \right) A_2 = 0 \\ \left(\frac{1}{6} - I_1\lambda \right) A_0 + \left(\frac{2}{15} - I_2\lambda \right) A_1 + \left(\frac{1}{10} - I_3\lambda \right) A_2 = 0 \\ \left(\frac{1}{10} - I_2\lambda \right) A_0 + \left(\frac{1}{10} - I_3\lambda \right) A_1 + \left(\frac{3}{35} - I_4\lambda \right) A_2 = 0 \end{cases} \quad [8]$$

da cui eliminando le A si ha la:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} - I_0\lambda & \frac{1}{6} - I_1\lambda & \frac{1}{10} - I_2\lambda \\ \frac{1}{6} - I_1\lambda & \frac{2}{15} - I_2\lambda & \frac{1}{10} - I_3\lambda \\ \frac{1}{10} - I_2\lambda & \frac{1}{10} - I_3\lambda & \frac{3}{35} - I_4\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad [9]$$

equazione di terzo grado in λ la cui soluzione dà, per mezzo della seconda delle [5], il periodo della sessa cercato. In essa è

$$I_n = \int_0^1 \frac{z^2(1-z)^2 z^n}{\gamma(z)} dz \quad (n=0,1,2,3). \quad [7']$$

TABELLA N. 3 : $T=9^m, 2$ $\alpha = \frac{4\pi^2}{gT^2}$

N°	$\alpha \Delta x$ 10 ⁻³	$q = (2\eta_i + 2\Delta\eta_i) v(x)$ 10 ¹⁰ cm ³	$2\xi_i = -\frac{q}{S(x)}$ 10 ³ cm	$2\Delta\eta_i$ cm	$2\eta_i + 2\Delta\eta_i$ cm
0					100
1	6,604	32,5	- 3,624	- 23,93	76,07
2	»	66,7	- 3,302	- 21,81	54,26
3	»	102,0	- 3,254	- 21,49	32,77
4	»	124,1	- 3,110	- 20,54	12,23
5	»	133,0	- 3,284	- 21,69	- 9,46
6	»	127,1	- 2,956	- 19,52	- 28,98
7	»	100,3	- 1,108	- 7,32	- 36,30
8	»	64,0	- 0,594	- 3,92	- 40,22
9	3,302	42,3	- 0,312	- 1,03	- 41,25
10	»	16,5	- 0,099	- 0,33	- 41,58
11	»	- 8,4	+ 0,052	+ 0,17	- 41,41
12	»	- 29,9	+ 0,208	+ 0,69	- 40,72
13	»	- 48,2	+ 0,274	+ 0,90	- 39,82
14	»	- 68,1	+ 0,362	+ 1,19	- 38,63
15	»	- 86,9	+ 0,506	+ 1,67	- 36,96
16	»	- 101,7	+ 0,658	+ 2,17	- 34,79
17	6,604	- 126,9	+ 0,852	+ 5,63	- 29,16
18	»	- 149,5	+ 1,114	+ 7,36	- 21,80
19	»	- 163,9	+ 1,441	+ 9,52	- 12,28
20	3,302	- 167,3	+ 1,838	+ 6,07	- 6,21
21	»	- 169,2	+ 1,718	+ 5,67	- 0,54
22	6,604	- 169,5	+ 1,246	+ 8,23	7,69
23	»	- 164,4	+ 1,445	+ 9,54	17,23
24	»	- 152,8	+ 0,999	+ 6,60	23,83
25	»	- 136,1	+ 0,874	+ 5,77	29,60
26	»	- 114,6	+ 0,753	+ 4,97	34,57
27	»	- 90,4	+ 0,675	+ 4,46	39,03
28	»	- 64,1	+ 1,135	+ 7,50	46,53
29	»	- 44,9	+ 1,069	+ 7,06	53,59
30	»	- 23,5	+ 0,851	+ 5,62	59,21
31	»	- 7,2	+ 1,500	+ 9,91	69,12
32		- 2,9			

Sessa binodale;

T = 9^m, 2;

L'ultima colonna dà l'andamento della ampiezza;

i nodi cadono tra la sez. 4, 5 e tra 21-22 e a calcoli fatti alle distanze rispettivamente: 2280 m e 8032 m dall'estremo sud del lago.

[il valore di T usato si può ritenere sufficientemente approssimato scartando il q di poco dallo zero]

Nella tabella n. 5 si riportano i dati numerici per l'integrazione della [7'] di sezione in sezione avendo posto $\gamma(z) = \sigma(z)$ cioè $h=1$. I valori ottenuti per I_i ($i=0,1,2,3,4$) consentono la soluzione della [9].

Con i valori ottenuti per I_i la [9] può scriversi:

$$911,579218 \lambda^3 - 17,102171 \lambda^2 + 0,0804109 \lambda - 0,0000952381 = 0 \quad [10]$$

TABELLA N. 4 : $T=5^m 8$ $\alpha = \frac{4\pi^2}{gT^2}$

N°	$\alpha \Delta x$ 10 ⁻³	$q = (2\eta_i + 2 \Delta \eta_i) v(x)$ 10 ¹⁰ cm ³	$2 \xi_i = -\frac{q}{S(x)}$ 10 ³ cm	$\Delta \eta_i$ cm	$2 \eta_i + 2 \Delta \eta_i$ cm
0					100
1	16,615	32,5	-3,624	-60,21	39,79
2	»	50,4	-2,495	-41,45	-1,66
3	»	49,3	-1,573	-26,14	-27,80
4	»	30,5	-0,764	-12,69	-40,49
5	»	1,1	-0,027	-0,45	-40,94
6	»	-24,5	+0,570	+9,47	-31,47
7	»	-53,6	+0,592	+9,84	-21,63
8	»	-75,2	+0,698	+11,60	-10,03
9	8,308	-80,6	+0,595	+4,94	-5,09
10	»	-83,8	+0,504	+4,19	-0,90
11	»	-84,3	+0,522	+4,34	+3,44
12	»	-82,5	+0,575	+4,78	+8,22
13	»	-78,8	+0,448	+3,72	+11,94
14	»	-72,8	+0,387	+3,22	+15,16
15	»	-65,4	+0,381	+3,16	+18,32
16	»	-58,1	+0,376	+3,12	+21,44
17	16,615	-42,6	+0,286	+4,75	+26,19
18	»	-22,3	+0,166	+2,76	+28,95
19	»	-3,1	+0,027	+0,45	+29,40
20	8,308	5,0	-0,055	-0,46	+28,94
21	»	13,7	-0,139	-1,15	+27,79
22	16,615	30,0	-0,220	-3,65	+24,14
23	»	46,0	-0,404	-6,71	+17,43
24	»	57,7	-0,377	-6,26	+11,17
25	»	65,5	-0,421	-6,99	+4,18
26	»	68,5	-0,450	-7,48	-3,30
27	»	66,2	-0,494	-8,21	-11,51
28	»	58,4	-1,034	-17,18	-28,69
29	»	46,6	-1,110	-18,44	-47,13
30	»	27,8	-1,006	-16,71	-63,84
31	»	10,2	-2,125	-35,31	-99,15
32		4,0			

Sessa trinodale;

$T=5^m, 8;$

l'ultima colonna dà l'andamento delle ampiezze;

i nodi cadono tra le sezioni 1, 2; tra 10, 11 e tra 25, 26 e a calcoli fatti rispettivamente alle distanze 975 m, 4567 m, 10275 m dall'estremo sud del lago.

[il valore di T usato si può ritenere sufficientemente approssimato, scartando il q di poco dallo zero].

Questa equazione si risolve con il metodo di Newton usando come primo valore approssimato di λ quello che si ottiene dalla seconda delle [5] ($h=1$) usando per il periodo dell'uninodale il valore trovato con il metodo di Defant. Si ottiene così per λ il valore $\lambda_1=0,0018216$

a cui corrisponde per il periodo dell'uninodale il valore più attendibile

$$T_1 = 14^m, 2$$

Riducendo poi la [10] ad una equazione di secondo grado in λ , per mezzo ad esempio della regola di Ruffini, si ottengono in ultimo gli altri due valori di λ :

$$\lambda_2 = 0,0046773 \qquad \lambda_3 = 0,01226$$

che danno gli altri due valori

$$T_2 = 8^m, 85 \qquad T_3 = 5^m, 5$$

per la binodale e trinodale rispettivamente.

Determinazione della posizione delle linee nodali.

I nodi si avranno in corrispondenza di

$$\frac{du}{dz} = 0,$$

essendo

$$u = \sum_{i=0}^m z(1-z)^i A_i.$$

Nel caso $m=2$, esplicitando

$$u = A_0 z (1-z) \left(1 + \frac{A_1}{A_0} z + \frac{A_2}{A_0} z^2 \right)$$

e per i nodi

$$\frac{du}{dz} = 4 \frac{A_2}{A_0} z^3 + 3 \left(\frac{A_1}{A_0} - \frac{A_2}{A_0} \right) z^2 + 2 \left(1 - \frac{A_1}{A_0} \right) z - 1 = 0 \quad [11]$$

equazione cubica in z la cui soluzione dà la posizione $z = \frac{v}{a}$ dei nodi.

I rapporti $\frac{A_1}{A_0}$ e $\frac{A_2}{A_0}$ vanno determinati da due delle equazioni [8] usando per l'uni-bi e tri-nodale rispettivamente i tre valori trovati di λ . L'equazione cubica in z si risolve quindi col metodo di Newton, usando per primo valore approssimato di z quello che si deduce dal metodo di Defant. Essendo $0 \leq z \leq 1$ per l'uninodale l'unica radice di [11] utile sarà quella compresa fra 0 ed 1; per la binodale le due comprese fra 0 ed 1; per la trinodale tutte e tre.

TABELLA N. 5 (Dati numerici per l'equaz. [9])

$z = \frac{v}{a}$	dz	M $\frac{z^2(1-z)^2}{\sigma(z)} dz$ 10^{-2}	Mz 10^{-2}	Mz^2 10^{-2}	Mz^3 10^{-2}	Mz^4 10^{-2}	N.
0	0	0	0	0	0	0	0
0,01795	0,01795	73,237669	1,314616	0,0235825	0,000423	0,0000076	1
0,04280	0,02485	141,230949	6,044685	0,258735	0,011074	0,000474	2
0,07870	0,03590	463,075210	36,444020	2,868288	0,225734	0,017766	3
0,11597	0,03727	672,477369	77,987200	9,044148	1,048850	0,121635	4
0,15601	0,04004	1246,551710	194,474532	30,339822	4,733316	0,738441	5
0,19053	0,03452	1216,406890	231,762005	44,161652	8,414120	1,603289	6
0,24161	0,05108	971,844200	234,807277	56,733349	13,707344	3,311923	7
0,29684	0,05523	981,576280	291,371103	86,489434	25,673524	7,620843	8
0,32666	0,02982	448,715850	146,577520	47,881122	15,640847	5,109251	9
0,36118	0,03452	449,336070	162,291202	58,614992	21,170563	7,646208	10
0,39431	0,03313	521,781130	205,743517	81,126530	31,989002	12,613553	11
0,42303	0,02872	561,077770	237,352730	100,407111	42,475220	17,968254	12
0,44788	0,02485	419,205012	187,753541	84,090848	37,662609	16,868288	13
0,47549	0,02761	456,133324	216,886834	103,127638	49,036161	23,316231	14
0,50242	0,02693	536,952557	269,775704	135,540787	68,098402	34,214019	15
0,52451	0,02209	560,201008	293,831031	154,117460	80,836149	42,399409	16
0,56454	0,04003	1047,487790	591,348760	333,839596	188,465805	106,396348	17
0,60734	0,04280	1318,637056	800,861030	486,395103	295,407202	179,412670	18
0,64393	0,03659	1252,631903	806,607261	519,398807	334,456474	215,366638	19
0,65912	0,01519	676,822805	446,107447	294,038220	193,806472	127,741670	20
0,67569	0,01657	742,796960	501,900480	339,129152	229,146177	154,831788	21
0,70813	0,03244	818,414519	579,543873	410,392324	290,611116	205,790410	22
0,74472	0,03659	830,437930	618,443730	460,567519	342,993843	255,434431	23
0,78186	0,03714	513,542690	401,518490	313,931214	245,450259	191,907721	24
0,82052	0,03866	364,956624	299,454209	245,708139	201,608442	165,423742	25
0,86055	0,04003	262,941098	226,273962	194,719978	167,566277	144,199101	26
0,89921	0,03866	172,978139	155,543672	139,866491	125,769347	113,093107	27
0,93649	0,03728	238,142254	223,017839	208,853849	195,589541	183,167541	28
0,95927	0,02278	102,883930	98,693470	94,673689	90,817630	87,118634	29
0,98136	0,02209	39,567280	38,829750	38,105942	37,395647	36,698575	30
0,99655	0,01519	0,904170	0,901051	0,897942	0,894844	0,891757	31
1,00000	0,00345	0	0	0	0	0	32
		18102,948146	8583,462541	5075,3434605	3340,702414	2341,0237246	
		181,02948146	85,83462541	50,753434605	33,40702414	23,410237246	
		I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	

I termini somme delle colonne sono in 10^{-2} ; per i calcoli torna comodo usarli come scritti alla riga sottostante.

Si sono ottenuti i seguenti risultati:
per l'uninodale: $z = 0,45758$
che comporta la distanza dall'origine dell'uninodo di 5337,82 m; per

la binodale:

$$z_1 = 0,16463$$

$$z_2 = 0,71272$$

che comportano le distanze dall'origine dei due nodi di 2625 m e di 8560 m;

per la trinodale:

$$z_1 = 0,08677$$

$$z_2 = 0,45173$$

$$z_3 = 0,87231$$

che comportano le distanze dall'origine dei tre nodi di
1610 m 5285 m 10515 m.

Nella seguente tabella n. 6 si hanno i valori riassuntivi e comparativi dei dati ottenuti con i due metodi:

TABELLA N. 6

Tipo di sessa	Periodo della sessa espresso in minuti primi		Differenza Valori (numerici)	Distanze dei nodi dallo estremo sud del lago in m		Differenze in m (Valori numerici)
	Metodo di Defant	Metodo di Hidaka		Metodo di Defant	Metodo di Hidaka	
Uninodale	14,6	14,2	0,4	5455	5338	117
Binodale	9,2	8,85	0,35	2280 8032	2625 8560	345 528
Trinodale	5,8	5,5	0,3	975 4567 10275	1610 5285 10515	635 718 240

Distribuzione delle ampiezze.

La [4] essendo $v=za$ si scrive:

$$\xi = -a \frac{du}{dz} \quad [4']$$

che nel caso $m=2$ dà:

$$\xi = -a A_0 \left[4 \frac{A_2}{A_0} z^3 + 3 \left(\frac{A_1}{A_0} - \frac{A_2}{A_0} \right) z^2 + 2 \left(1 - \frac{A_1}{A_0} \right) z - 1 \right]$$

oppure

$$\frac{\xi}{a A_0} = - \left[4 \frac{A_2}{A_0} z^3 + 3 \left(\frac{A_1}{A_0} - \frac{A_2}{A_0} \right) z^2 + 2 \left(1 - \frac{A_1}{A_0} \right) z - 1 \right]. \quad [12]$$

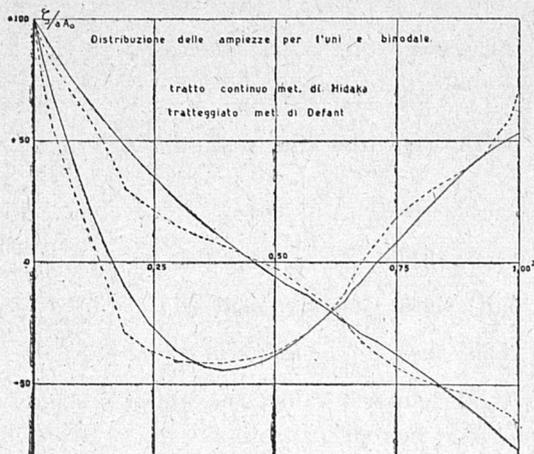


Fig. 2

dove i valori dei rapporti

$$\frac{A_1}{A_0} \text{ e } \frac{A_2}{A_0}$$

si determinano come già indicato in relazione ai tre valori di λ , quindi la [12] si calcola per ogni z di ciascuna sezione e si ha così l'andamento delle ampiezze. La [12] per il caso in esame vale:

$$\frac{\xi}{a A_0} = - \left[1,664638 z^3 - 3,200495 z^2 + 3,301344 z - 1 \right] \text{ per l'uninodale}$$

$$\frac{\xi}{a A_0} = - \left[6,302967 z^3 - 14,052551 z^2 + 8,216884 z - 1 \right] \text{ per la binodale}$$

$$\frac{\xi}{a A_0} = - \left[29,217929 z^3 - 41,223520 z^2 + 14,873382 z - 1 \right] \text{ per la trinodale}$$

Si tralascia di riportare la tabella dei valori ottenuti e si riportano invece nelle figure 2 e 3 le curve andamento delle ampiezze in funzione di z ottenute con i due metodi. Il confronto nella tabella n. 6 e nelle figure 2 e 3 fra i due metodi dice che i risultati ottenuti sono sufficientemente in accordo e che presumibilmente rispondono alla realtà.

Roma - Istituto Nazionale di Geofisica - dicembre 1947.

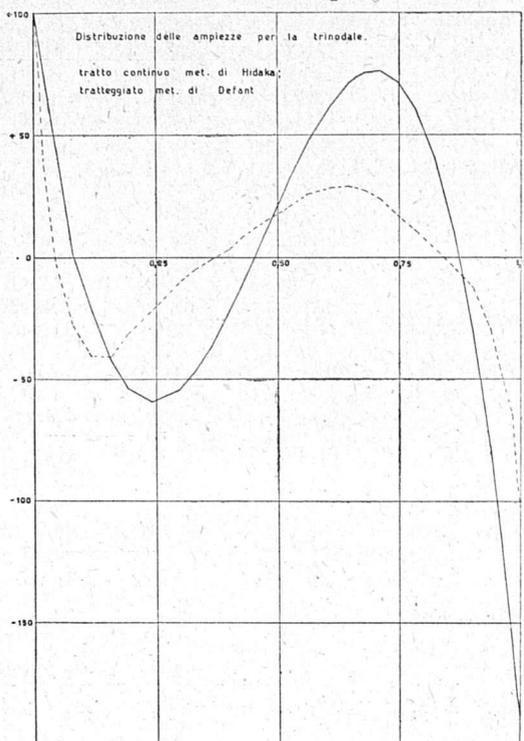


Fig. 3

RIASSUNTO

Nel presente lavoro si determinano con i metodi di Defant e di Hidaka i periodi delle sesse uni-bi e trinodale del lago d'Orta; si individua la posizione dei nodi e, da ultimo, si ottiene l'andamento delle ampiezze di oscillazione.

BIBLIOGRAFIA

(¹) CALOI P.: *Le sesse del lago di Garda. Parte prima. Sesse che interessano l'intero lago.* Annali Geofisica, I, 24-48 (1948).

(²) LANDINI P.: *Il lago d'Orta.* Appunti di geografia antropica. Boll. della R. Soc. Geografica Italiana, 451 (1923).