

PUBBLICAZIONI
DELL'ISTITUTO NAZIONALE DI GEOFISICA

N. 168

R. CIALDEA - A. LO SURDO - G. ZANOTELLI

Il regime transitorio delle sonde radioattive

ROMA 1949

Estratto da *Annali di Geofisica*

Vol. II, n. 1, 1949, pag. 1-12

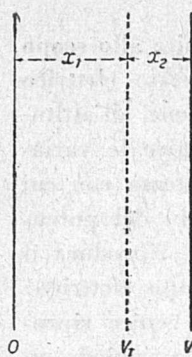
In prosecuzione della serie di ricerche da noi eseguite allo scopo di studiare i mezzi di rilevamento sistematico dello stato elettrico della atmosfera ⁽¹⁾, abbiamo rivolto la nostra attenzione all'attitudine degli equalizzatori radioattivi di potenziale a seguire le variazioni del campo elettrico. Come è evidente, dalla prontezza con cui per mezzo di un equalizzatore si ottengono le indicazioni del potenziale dipende la possibilità di avere un rilevamento che riproduca il più fedelmente possibile le effettive variazioni del campo elettrico: difatti mentre una variazione lenta del potenziale può venire riprodotta con sufficiente fedeltà anche da un equalizzatore che richiede un certo tempo per raggiungere il valore stazionario, con lo stesso equalizzatore una variazione brusca e di breve durata può risultare mascherata o fortemente alterata.

Gli autori ⁽²⁾ che per il passato avevano considerato il problema del regime transitorio delle sonde radioattive avevano ritenuto come ammissibile l'ipotesi che la sonda si caricasse per effetto della differenza fra il potenziale del punto ove la stessa si pone ed il potenziale istantaneo della sonda. Avevano inoltre ammesso che la carica avvenisse per la ionizzazione dell'aria circostante come attraverso ad una resistenza ohmica, trascurando cioè l'azione della carica spaziale. Nel presente lavoro, abbiamo voluto studiare la legge di variazione, in funzione del tempo, del potenziale assunto da una sonda radioattiva tenendo conto anche dell'effetto della carica spaziale.

La considerazione del regime transitorio di una sonda radioattiva di dimensioni finite, immersa nel campo elettrico atmosferico, oltre a presentare notevoli complicazioni di calcolo, renderebbe malagevole anche la verifica sperimentale dei risultati ottenuti. Abbiamo preferito perciò trattare il caso del campo elettrico uniforme nell'interno di un condensatore piano ad armature indefinite, fra le quali viene applicata una differenza di potenziale costante (fig. 1). La sonda vi è rappresentata in forma di uno strato conduttore e ionizzante sottile,

parallelo alle armature, ed anche indefinitamente esteso. Questa schematizzazione, da noi già adottata in precedenti lavori, può risultare sufficiente ad una descrizione approssimata del fenomeno.

Tuttavia conviene subito rilevare che, al contrario di quanto avviene nel caso della sonda in condizioni stazionarie, durante il regime transitorio non può stabilirsi un rapporto fra la distribuzione della carica spaziale per lo strato ionizzante indefinito e quella per la sonda



limitata: infatti questa ultima distribuzione, oltre a variare da istante ad istante, è caratteristica di ogni posizione della sonda nel condensatore e si differenzia anche a seconda che la si esamini durante il periodo di carica o rispettivamente di scarica. E' dunque da attendersi che i risultati della trattazione per lo strato indefinito possano essere messi in relazione con quelli pertinenti alla sonda limitata soltanto singolarmente per ciascuna posizione della sonda ed avuto riguardo se trattasi di regime di carica o rispettivamente di scarica.

Fig. 1

L'impostazione teorica rigorosa del problema dovrebbe prendere le mosse dalla considerazione della distribuzione della carica spaziale nell'interno del condensatore sotto l'azione del campo elettrico, con il vincolo che venga mantenuta costante la differenza di potenziale applicata tra le armature, e tenendo conto della presenza della capacità, con un procedimento analogo a quello da noi seguito nella precedente nota, cioè risolvendo l'equazione di Poisson e l'equazione di continuità.

Perché si raggiunga l'equilibrio occorre che siano soddisfatte due condizioni: che le cariche emesse dallo strato ionizzante assumano la distribuzione che loro compete in condizioni stazionarie, e che inoltre la capacità rappresentata dalla sonda si carichi al potenziale di regime.

Sotto l'azione del campo elettrico la sonda si va caricando in ragione della sua naturale capacità rispetto alle armature e di quella presentata dalla linea di collegamento e dallo strumento di misura impiegato, generalmente un elettrometro. La rappresentazione adottata della sonda, in forma di uno strato ionizzante indefinito, implica che la capacità aggiunta (linea ed elettrometro) debba essere riferita ad una porzione delle armature del condensatore, corrispondente a quella che effettivamente nelle condizioni reali è investita dalle linee di campo elettrico uscenti dalla sonda limitata; in altre parole la naturale capacità dello strato ionizzante per unità di superficie verso le

armature dovrà considerarsi aumentata di una certa capacità aggiunta, calcolata pure per unità di superficie delle armature stesse, che rappresenta la capacità della linea e dell'elettrometro.

L'influenza del tempo necessario all'assetto delle cariche diventa sempre meno importante, rispetto al tempo richiesto per la carica della capacità, man mano che quest'ultima aumenta; per capacità sufficientemente grandi la costante di tempo del sistema potrà essere attribuita quasi esclusivamente alla carica della capacità. Una trattazione approssimata del fenomeno potrà perciò condursi ammettendo che mentre la carica spaziale assume una certa distribuzione, il potenziale della sonda, per effetto della notevole capacità, si possa ritenere costante; in tal modo il fenomeno può essere considerato, nei riguardi dell'assetto della carica spaziale, come un susseguirsi di stati stazionari.

Ammissa questa ipotesi la disposizione da noi studiata può tradursi nello schema equivalente della fig. 2 ove le C_1 e C_2 conglobano le capacità aggiunte esterne, ed ove con R_1 e R_2 si sono simboleggiate

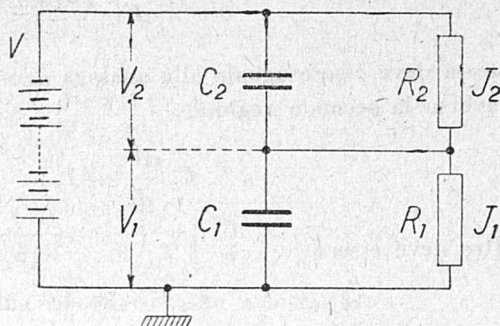


Fig. 2

le resistenze apparenti delle due regioni in cui lo spazio interno al condensatore è diviso dallo strato ionizzante. Queste resistenze rappresentano il legame fra le differenze di potenziale V_1 e V_2 applicate agli estremi di ciascuna regione, e le densità delle correnti J_1 e J_2 che traversano le stesse. Con l'ipotesi da noi posta, tali correnti J_1 e J_2 sono costanti in tutte le sezioni di ciascuna regione, mentre nella realtà le stesse sono affette dalle variazioni necessarie all'apporto delle cariche che modificano le distribuzioni della carica spaziale.

Come legame fra le differenze di potenziale e la densità di corrente prenderemo quello dedotto da J. J. Thomson (³) per le condizioni stazionarie, cioè che la corrente sia proporzionale al quadrato della differenza di potenziale:

$$J_1 = a_1^2 V_1^2, \quad J_2 = a_2^2 V_2^2, \quad [1]$$

ove si è posto

$$a_1 = \sqrt{\frac{9}{32\pi} \frac{k_1}{x_1^3}}, \quad a_2 = \sqrt{\frac{9}{32\pi} \frac{k_2}{x_2^3}}; \quad [2]$$

x_1 e x_2 rappresentano i valori assoluti degli spessori della prima e rispettivamente della seconda regione e k_1 , k_2 le mobilità degli ioni che, se il potenziale della prima armatura è minore di quello della seconda, sono nella prima regione solo positivi e nella seconda solo negativi.

La densità di corrente che fluisce attraverso la prima regione è composta dalla densità della corrente di carica della capacità C_1 e dalla densità della corrente di conduzione ionica, cioè

$$C_1 \frac{dV_1}{dt} + J_1; \quad [3]$$

la stessa deve essere uguale alla analoga densità di corrente che fluisce attraverso la seconda regione

$$C_2 \frac{dV_2}{dt} + J_2. \quad [4]$$

Inoltre deve essere

$$V_1 + V_2 = V, \quad [5]$$

dove V è la differenza di potenziale costante applicata agli estremi del condensatore.

Uguagliando le correnti [3] e [4] e ricordando la [5] e le [1], si ha:

$$C \frac{dV_1}{dt} = (a_2^2 - a_1^2) V_1^2 - 2a_2^2 V V_1 + a_2^2 V^2, \quad [6]$$

in cui si è posto

$$C = C_1 + C_2. \quad [7]$$

Questa equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili può integrarsi facilmente: infatti si ha

$$I = \int \frac{dV_1}{(a_2^2 - a_1^2) V_1^2 - 2a_2^2 V V_1 + a_2^2 V^2} = \frac{t}{C} + \text{cost.} \quad [8]$$

Poiché le radici α e β dell'equazione di secondo grado

$$(a_2^2 - a_1^2) V_1^2 - 2a_2^2 V V_1 + a_2^2 V^2 = 0$$

sono reali, distinte, e date da

$$\alpha = \frac{V}{1 - \frac{a_1}{a_2}}, \quad \beta = \frac{V}{1 + \frac{a_1}{a_2}}, \quad [9]$$

l'integrale che compare nella [7] si spezza nella somma di due integrali

$$I = \frac{1}{(a_2^2 - a_1^2)(\alpha - \beta)} \left[\int \frac{dV_1}{V_1 - \alpha} - \int \frac{dV_1}{V_1 - \beta} \right]. \quad [10]$$

La soluzione della [6] risulta perciò

$$\frac{1}{2a_1 a_2 V} \ln \frac{V_1 - \alpha}{V_1 - \beta} = \frac{t}{C} + \text{cost}, \quad [11]$$

cioè

$$\frac{V_1 - \beta}{V_1 - \alpha} = A e^{-t/\tau}, \quad [12]$$

dove si è posto

$$\tau = \frac{C}{2\gamma_1 a_2 V} = \frac{16\pi}{9} \frac{C}{V} \sqrt{\frac{x_1^3 x_2^3}{k_1 k_2}}, \quad [13]$$

e si è indicato con A una nuova costante arbitraria.

La determinazione di quest'ultima si fa immediatamente perché, per $t=0$, V_1 deve assumere un assegnato valore $V_{1,0}$; si ha così

$$A = \frac{V_{1,0} - \beta}{V_{1,0} - \alpha}. \quad [14]$$

Risolvendo la [12] rispetto a V_1 dopo avervi sostituito il valore ora determinato della costante arbitraria si ottiene

$$V_1 = \frac{\beta(V_{1,0} - \alpha) - \alpha(V_{1,0} - \beta)e^{-t/\tau}}{V_{1,0} - \alpha - (V_{1,0} - \beta)e^{-t/\tau}}. \quad [15]$$

Allorché t tende all'infinito, il potenziale tende al valore

$$V_{1,s} = \beta, \quad [16]$$

cioè per le [2] e [8]

$$V_{1,s} = \frac{V}{1 + \sqrt{\frac{k_1 x_2^3}{k_2 x_1^3}}}, \quad [17]$$

valore che coincide con quello determinato appunto per il caso stazionario nel nostro già citato lavoro.

Introducendo nella [15] il valore stazionario ora determinato, possiamo eliminare le α e β , ed otteniamo l'espressione del potenziale istantaneo in funzione dei suoi valori iniziale e finale:

$$V_1 = V_{1,s} \frac{2V_{1,0}V_{1,s} - V(V_{1,0} + V_{1,s}) - V(V_{1,0} - V_{1,s})e^{-t/\tau}}{2V_{1,0}V_{1,s} - V(V_{1,0} + V_{1,s}) - (2V_{1,s} - V)(V_{1,0} - V_{1,s})e^{-t/\tau}}. \quad [18]$$

A seconda che sia $V_{1,0} \geq V_{1,s}$ l'andamento di V_1 risulta, come effettivamente deve essere, crescente o rispettivamente decrescente col tempo, e tendente asintoticamente al valore di regime $V_{1,s}$.

Nel caso particolare in cui lo strato ionizzante sia posto all'incirca ad uguale distanza dalle due armature, e più precisamente in posizione tale che sia $a_1 = a_2$, cioè che

$$\frac{x_1}{x_2} = \sqrt[3]{\frac{k_1}{k_2}} \quad [19]$$

la [15] e la [18] si riducono semplicemente a

$$V_1 = V_{1,s} + (V_{1,0} - V_{1,s})e^{-t/\tau}. \quad [20]$$

In questo caso particolare la legge di variazione del potenziale viene a coincidere, a parte il significato della costante di tempo, con quella di carica e scarica di un condensatore attraverso ad una resistenza puramente ohmica.

Le grandezze α e β che compaiono nella [15] non dipendono secondo le [2] e la [9] che dalle distanze dello strato ionizzante dalle armature e dalle mobilità degli ioni. La τ , invece, dipende anche dal potenziale applicato V e della capacità C , secondo la [13]; non dipende però dall'intensità di ionizzazione dello strato indefinito (attività della sonda), in quanto, secondo le ipotesi di Thomson, tale intensità di ionizzazione non appare nel legame, rappresentato dalle [1] e [2], fra densità di corrente e differenza di potenziale ai capi di ciascuna regione: questo legame, come è noto, è valido sino a che tale densità si mantiene molto più piccola di quella corrispondente alla saturazione.

La τ ha nell'esponenziale la funzione di una costante di tempo, e

da essa dipende la velocità con cui lo strato ionizzante tende ad assumere il potenziale di regime. Tuttavia, salvo il caso particolare corrispondente alla [20], la τ non presenta un significato fisico evidente; la sua considerazione è, come ora vedremo, ugualmente proficua.

Determiniamo il tempo necessario acciocché la sonda assuma un potenziale uguale alla frazione p del potenziale di regime, cioè che sia $V_1 = p V_{1,s}$. Dalla [14] otteniamo

$$T_p = \tau \ln \frac{(\alpha - p\beta)(V_{1,0} - \beta)}{\beta(1-p)(V_{1,0} - \alpha)} \quad [21]$$

Questa formula è utile per conoscere dopo quanto tempo potrà ritenersi che la sonda abbia raggiunto il potenziale di regime: assumendo ad esempio che tale condizione sia praticamente verificata allorché il potenziale stesso non differisca più dall'1% da $V_{1,s}$, basterà porre $p=0,99$ nella precedente.

Se invece volessimo conoscere il tempo necessario acciocché la sonda varii il suo potenziale, a partire dal valore iniziale $V_{1,0}$, di una frazione q della differenza fra il potenziale finale e quello iniziale, cioè affinché assuma il potenziale $V_1 = V_{1,0} + q(V_{1,s} - V_{1,0})$ sempre dalla [15] otterremo

$$T_q = \tau \ln \frac{V_{1,0} - \frac{\alpha - q\beta}{1-q}}{V_{1,0} - \alpha} \quad [22]$$

Questa formula è utile per esprimere la rapidità con cui la sonda tende a mettersi in equilibrio: ad es. volendo conoscere il tempo occorrente perché la sonda superi metà dell'intervallo fra il potenziale finale e quello iniziale, che indicheremo come tempo di dimezzamento, avremo

$$T_{0,5} = \tau \ln \left[1 + \frac{\beta - \alpha}{V_{1,0} - \alpha} \right] \quad [23]$$

che si ottiene dalla [22] facendovi $q=0,5$.

Ad illustrazione della trattazione ora esposta, riportiamo due diagrammi costruiti in base alle formule ora riportate.

Il diagramma di fig. 3 rappresenta, in funzione del tempo, l'andamento, secondo la formula [15], del potenziale V_1 in rapporto al potenziale totale V , per il caso particolare $C/V=0,2$ u.e.s., $x_1 + x_2 = 60$

cm, e per tre diverse posizioni dello strato ionizzante, corrispondenti a $x_1 = 15, 30, 45$ cm. Nel diagramma sono riportate le curve di carica, determinate prendendo inizialmente $V_{1,0} = 0$, e le curve di scarica per $V_{1,0} = V$. Dal diagramma si rileva che queste due famiglie di curve non hanno andamento esattamente simmetrico a causa della differente mobilità degli ioni dei due segni. Inoltre dipendendo la τ dalla posizione dello strato ionizzante, la velocità con cui si stabilisce il regime

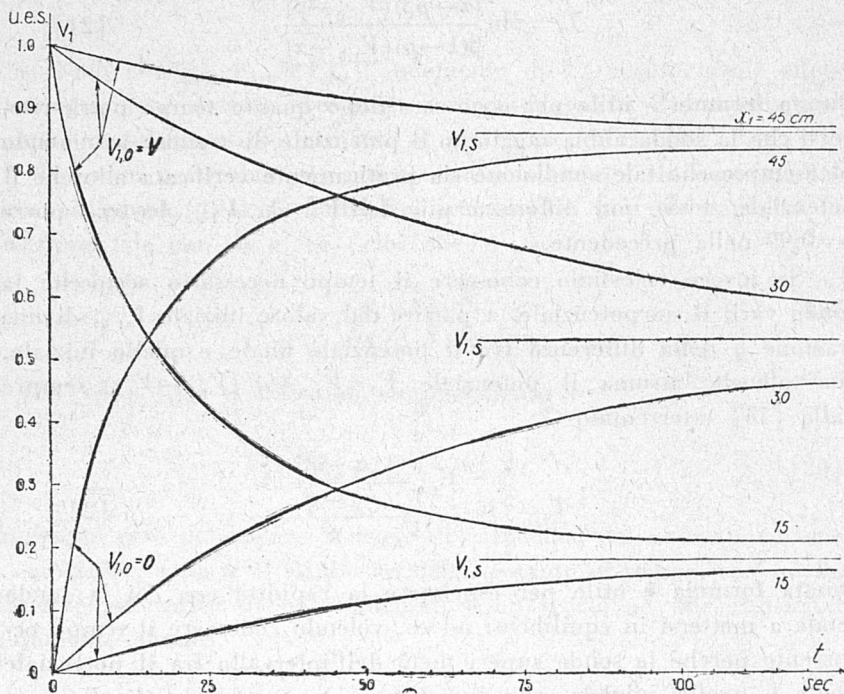


Fig. 3

stazionario varia con la posizione stessa e risulta minima allorché lo strato si trova ad uguale distanza dalle due armature.

Per illustrare quest'ultima circostanza abbiamo riportato (fig. 4) l'andamento in funzione dell'ascissa dello strato della costante di tempo τ e del tempo di dimezzamento secondo la [23], relativo al caso ora trattato, sia per la carica che per la scarica.

Abbiamo eseguito alcune esperienze allo scopo di confrontare i risultati dedotti teoricamente per uno strato ionizzante indefinito, con

quelli effettivamente ottenibili in pratica per mezzo di una sonda di limitata superficie posta fra le armature di un condensatore piano.

La ricerca sperimentale fu eseguita usando una sonda radioattiva costituita da un cubetto di ottone di 15 mm di spigolo, che porta su una delle faccie un dischetto metallico ricoperto elettroliticamente di polonio. Questa sonda, senza riduttore di percorso, era del tipo più diffusamente descritto

nelle precedenti note ⁽¹⁾, e di attività sufficiente per assicurare che, in relazione ai campi elettrici impiegati, fosse verificata sempre la condizione di Thomson, cioè che il valore della corrente si mantenesse molto inferiore a quello di saturazione. La sonda era disposta nella parte centrale di un condensatore piano con la superficie attiva normale alle armature. Il condensatore era costituito da due grandi armature metalliche poste fra loro alla distanza di 60 cm e così estese che il campo

poteva ritenersi, nella parte centrale, praticamente uniforme. Un elettrometro a periodo piccolo rispetto alle costanti di tempo da misurare fu impiegato per la misura della differenza di potenziale tra la sonda e una delle armature.

La capacità dell'elettrometro non si manteneva in realtà costante nel corso delle misure ma variava da 40 a 43 cm a seconda della posizione dell'equipaggio mobile: data l'esiguità della variazione abbiamo potuto riferirci sempre ad un valore medio costante.

In parallelo all'elettrometro si potevano disporre capacità di vario

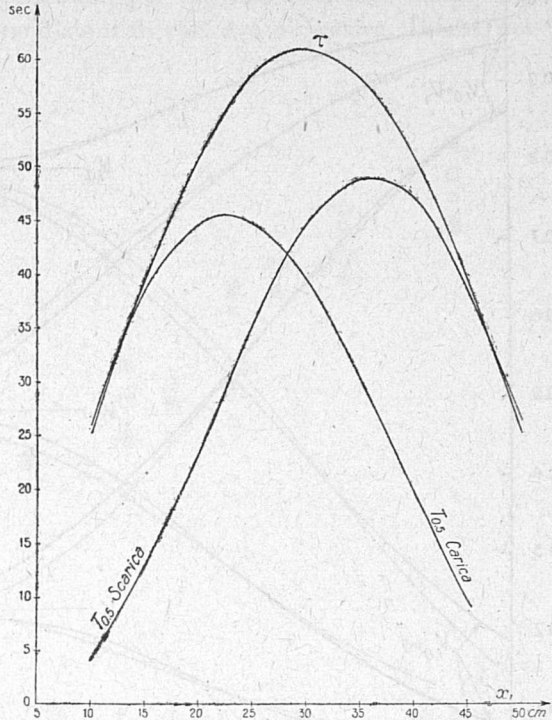


Fig. 4

valore per verificarne l'influenza sull'andamento del potenziale. Tali capacità erano costituite da condensatori cilindrici aventi come dielettrico paraffina, realizzati in modo da presentare una resistenza praticamente infinita. Le misure da noi condotte rilevavano i valori dei potenziali assunti dalla sonda in istanti successivi a partire da un va-

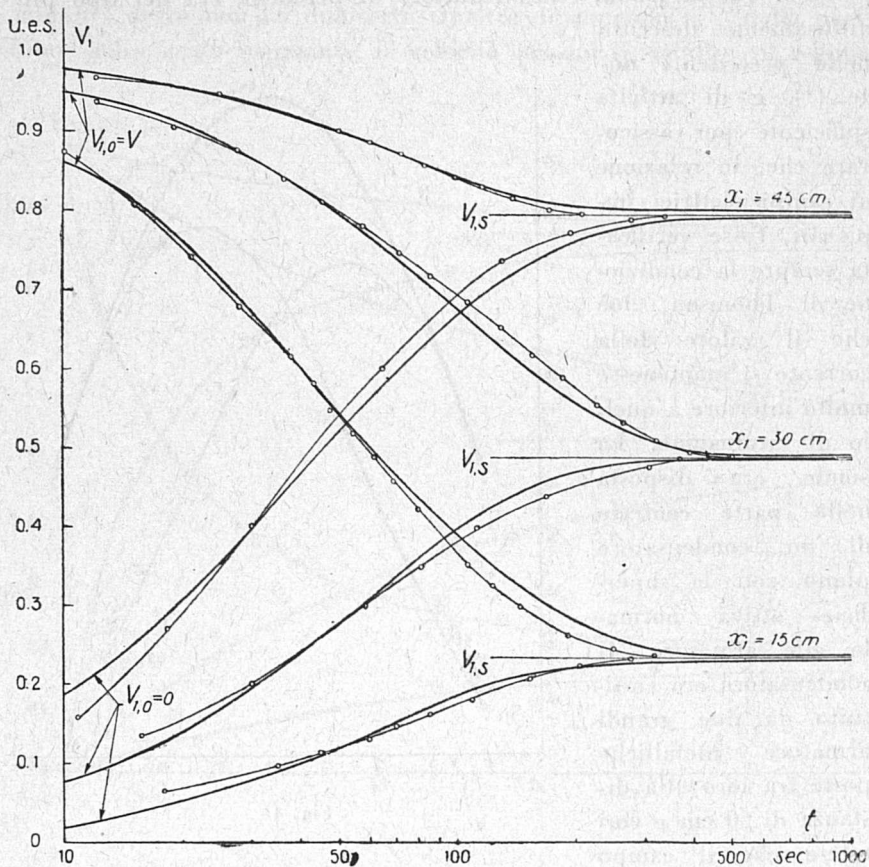


Fig. 5

lore iniziale, che fu nelle nostre esperienze sempre $V_{1,0} = 0$ (carica) oppure $V_{1,0} = V$ (scarica), e sino praticamente a raggiungere il regime stazionario. Le misure furono eseguite per tre diverse distanze della sonda dalle armature, cioè per $x_1 = 15, 30, 45$ cm.

La fig. 5 rappresenta l'andamento delle curve di carica e rispettivamente di scarica ottenute sperimentalmente, allorché la sonda era nelle tre suddette posizioni, essendo $C = 300$ cm e $V = 1$ u.e.s.

Nella ora detta figura sono stati riportati per confronto anche le curve ottenibili secondo la precedente trattazione teorica relativa allo strato ionizzante indefinito.

Poiché nella [18] per lo strato indefinito compaiono tre parametri, $V_{1,8}$, $V_{1,0}$ e τ , per costruire le curve teoriche si sono assunti i valori iniziali e finali del potenziale nonché i tempi di dimezzamento coincidenti con quelli sperimentali, per ciascuna posizione della sonda e per ciascuna delle due condizioni di carica e di scarica. Infatti poi-

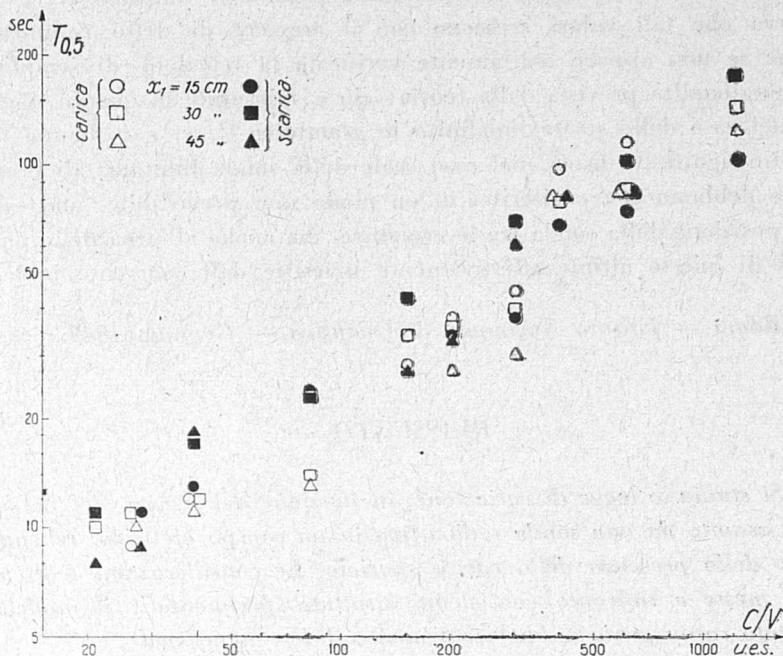


Fig. 6

ché la distribuzione della carica spaziale è profondamente differente nel caso indefinito ed in quello limitato, ed in questo secondo si differenzia non solo nelle varie posizioni della sonda ma anche a seconda che si tratti di carica o di scarica, il confronto fra le curve teoriche e sperimentali è possibile solo per curve che si riferiscono ad analoghe condizioni. Dall'esame del diagramma risulta che le curve teoriche e quelle sperimentali hanno andamenti abbastanza prossimi, e quindi il modello teorico sembra rappresentare, per ciascuna condizione, soddisfacentemente il fenomeno reale.

Tuttavia la circostanza degna di maggiore rilievo non è tanto

questa ultima accennata, quanto il fatto che i tempi di dimezzamento sperimentale dipendono, come previsto dalla nostra teoria, dalla capacità C e dalla differenza di potenziale applicata V , fatto che non si verificava invece nelle trattazioni fondate sulla ipotesi che la sonda presentasse una resistenza puramente ohmica. Nel diagramma di fig. 6 sono stati riportati i valori del tempo di dimezzamento sperimentali in funzione del rapporto C/V . A parte gli inevitabili scarti sperimentali dovuti a circostanze accidentali (moti convettivi dell'aria, variazioni delle condizioni di temperatura, pressione, umidità ecc.), si osserva che tali valori crescono con il crescere di detto rapporto, anche se non appare esattamente verificata la relazione di semplice proporzionalità prevista dalla teoria: ciò è spiegabile in quanto, mentre nel caso dello strato indefinito le grandezze C , x_1 e x_2 hanno un preciso significato fisico, nel caso reale della sonda limitata tali grandezze debbono essere riferite, in un modo non prevedibile, non solo alla posizione della sonda tra le armature, ma anche all'area delle porzioni di queste ultime effettivamente investite dalla corrente ionica.

Roma — Istituto Nazionale di Geofisica — Gennaio 1949.

RIASSUNTO

Si studia la legge di variazione, in funzione del tempo, del potenziale assunto da una sonda radioattiva in un campo elettrico, tenendo conto della presenza della carica spaziale. Le considerazioni teoriche sono messe a raffronto con alcuni risultati sperimentali: il modello adottato rappresenta soddisfacentemente il fenomeno reale.

BIBLIOGRAFIA

(¹) R. CIALDEA, A. LO SURDO, *Annali di Geofisica* I, 1, p. 49, 1948; R. CIALDEA, A. LO SURDO, G. ZANOTELLI, *Ann. di Geof.* I, 2, p. 155, 1948; R. CIALDEA, *Ann. di Geof.* I, 3, p. 364, 1948; R. CIALDEA, A. LO SURDO, G. ZANOTELLI, *Ann. di Geof.* I, 4, p. 491, 1948.

(²) H. BENNDORF, *Wiener Sitzungsber.* 2A, p. 15, 118, 1909; M. A. TUVE - C. HUFF, *Terr. Magn.*, 32, p. 17 (1927); I. HAHNFELD, *ZS. f. Geoph.* 8, p. 89, 1932.

(³) J. J. THOMSON, *Conduction of Electricity through gases*, p. 75, Cambridge, 1903.