PUBBLICAZIONI
DELL'ISTITUTO NAZIONALE DI GEOFISICA

N. 179

G. ALIVERTI - G. LOVERA

Sul verificarsi o meno di una condizione presupposta nel nuovo metodo Aliverti per la misura della radioattività dell'aria tellurica

ROMA 1949

Estratto da *Annali di Geofisica*
Vol. II, n. 2, 1949, pag. 258-266

STAMPATO DALL'ISTITUTO GRAFICO TIBERINO (ROMA, VIA GAETA 14)

In un lavoro pubblicato recentemente, uno di noi ha dato notizia [1] di un procedimento quantitativo per la misura del contenuto in gas radioattivi dell'aria tellurica; il procedimento consiste essenzialmente nell'attivare un elettrodo (deposizione di RaA), posto in una concamerazione del suolo a pareti laterali impermeabili al gas, per un tempo determinato. L'attivazione è preceduta da un intervallo di tempo di chiusura della concamerazione al fine di raggiungere nella concamerazione stessa una concentrazione di gas radioattivo prossima a quella di equilibrio per la profondità del foro scavato.

Nel suddetto lavoro, i risultati dell'andamento della concentrazione del radon nel pozzetto chiuso, in funzione del tempo di chiusura del pozzetto stesso, sono stati interpretati con una formula integrale dell'equazione:

$$\frac{dn}{dt} = k(n_0 - n) - \lambda n \qquad [1]$$

il cui significato fisico è il seguente. Detta $n(t)$ la concentrazione « nel pozzetto » all'istante t (supposta uniforme), e quindi nl il numero di atomi di radon contenuti nel pozzetto entro un cilindro di sezione unitaria, λ la costante di disintegrazione del radon e n_0 la concentrazione *costante* in un centimetro cubo di aria nel terreno ad una profondità Δs al di sotto del fondo del pozzetto, l'equazione della diffusione del radon dal terreno nel pozzetto assume la forma:

$$\frac{d(nl)}{dt} = k_1 \frac{n_0 - n}{\Delta s} - \lambda l n \qquad [2]$$

secondo la quale la variazione del numero di atomi di radon nell'interno del pozzetto (in un cilindro di sezione unitaria) è data ovviamente dalla differenza tra il numero di atomi entranti attraverso una area di sezione unitaria della base proporzionalmente al gradiente di concentrazione, ed il numero di quelli che si disintegrano nello stesso intervallo di tempo. Ponendo:

$$\frac{k_1}{l\Delta s} = k$$

la [2] concide con la [1].

In questa impostazione del problema si sono fatte implicitamente le ipotesi:

a) che la concentrazione del radon nel pozzetto si possa ritenere uniforme;

b) che si possa fare astrazione dal processo di diffusione, entro l'aria del pozzetto, del radon, rifornito dal terreno attraverso il fondo del pozzetto stesso.

Nel presente lavoro ci siamo proposti di esaminare la possibilità di introdurre queste due ipotesi semplificatrici, ed allo scopo abbiamo preso in considerazione il problema della diffusione del radon entro l'aria del pozzetto chiuso, in condizioni sia non stazionarie che stazionarie. Come si vedrà, i risultati dei calcoli confermano la legittimità di introdurre le semplificazioni *a*) e *b*). e quindi di adottare l'equazione [1]. Nella pratica però altri fenomeni si sovrappongono alla diffusione pura e semplice; ciò è dimostrato dai risultati numerici ottenuti con il nuovo metodo come pure dalle esperienze eseguite successivamente dagli AA. in un pozzetto aperto, delle quali si è data notizia recentemente in questa *Rivista* (n. 1, 1949). Le variazioni di pressione atmosferica sopratutto e quelle di temperatura sono responsabili della alterazione dell'equilibrio dovuto a pura e semplice diffusione. Un altro fatto, infine, interviene pure a modificare le considerazioni teoriche e precisamente una necessità tecnica per cui l'elettrodo che serve alla misura non è naturalmente puntiforme ma anzi ha una discreta lunghezza e raccoglie quindi l'attività di una parte considerevole della concamerazione. Queste considerazioni di carattere sperimentale inducono ulteriormente a rendere accettabili le semplificazioni di cui sopra.

L'equazione generale della semplice diffusione unidirezionale è:

$$D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \lambda n = \frac{\partial n}{\partial t} \qquad [3]$$

con D coefficiente di diffusione, λ costante di disintegrazione del radon, x ascissa lungo l'asse del pozzetto, misurata a partire dal fondo; il termine $-\lambda n$ tien conto della scomparsa del radon per disintegrazione. Posto:

$$\frac{\lambda}{D} = \alpha^2 \qquad [4]$$

la [3] diviene:

$$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \frac{1}{D}\frac{\partial n}{\partial t} - \alpha^2 n = 0 \qquad [5]$$

Consideriamo anzitutto il processo in *condizioni stazionarie*, cioè $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$; la [5[si riduce allora alla:

$$\frac{d^2 n}{dx^2} - \alpha^2 n = 0 \qquad [6]$$

il cui integrale generale è:

$$n = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x} \qquad [7]$$

con A e B costanti da determinarsi con le condizioni agli estremi. Nel caso di *pozzetto chiuso* superiormente e di lunghezza l, supposto che sul fondo del medesimo la concentrazione sia N_0, costante nel tempo, le condizioni ai limiti sono:

$$\begin{cases} x = 0 & n = N_0 \\ x = l & \dfrac{dn}{dx} = 0 \end{cases} \qquad [8]$$

Determinando A e B in modo da soddisfare le [8], la [7] assume la forma:

$$n = N_0 \frac{e^{\alpha(l-x)} + e^{-\alpha(l-x)}}{e^{\alpha l} + e^{-\alpha l}} = N_0 \frac{\cosh \alpha(l-x)}{\cosh \alpha l} \qquad [9]$$

Assunti i valori sperimentali per il radon: $D = 0{,}1$ cm^2 sec^{-1}; $\lambda = 2{,}097.10^{-6}$ sec^{-1}, risulta $\alpha^2 = 2{,}097.10^{-5}$ cm^{-2}. In base a questo valore, con la [9] si sono calcolati alcuni valori del rapporto N_l/N_0 tra la concentrazione N_l del radon all'estremo superiore del pozzetto chiuso e quella N_0 sul fondo, per diversi valori della lunghezza l: essi sono raccolti nella Tabella I:

TABELLA I

l in cm	40	80	100
N_l/N_0	$0{,}98_3$	$0{,}93_6$	$0{,}90_3$

Da questi dati appare chiaramente che per un pozzetto lungo anche un metro i divari di concentrazione da punto a punto, *in condizioni stazionarie*, sono di modesta entità; per una lunghezza di 40 cm poi si può, in prima approssimazione, ritenere costante la concentrazione del radon in tutto il tubo.

Riprendendo ora l'equazione generale e facendo l'ipotesi, per il momento, che la concentrazione N_0 sul fondo si mantenga invariata nel tempo, come condizioni agli estremi valgono ancora le [8], per t qualsiasi (a meno della sostituzione $\frac{\partial n}{\partial x}=0$ a $\frac{dn}{dx}=0$). La soluzione della [5] si può allora scrivere nella forma:

$$n(x,t)=\left[\sum_1^\infty b_{2m-1}\,\mathrm{sen}\,\frac{(2\,m-1)\pi}{2\,l}x\;.\;e^{-\frac{(2\,m-1)^2\pi^2}{4\,l^2}Dt}\right]e^{-\lambda t}$$

$$+N_0\frac{e^{\alpha(l-x)}+e^{-\alpha(l-x)}}{e^{\alpha l}+e^{-\alpha l}} \qquad [10]$$

il primo addendo rappresenta il processo transitorio, ed il secondo, che coincide con la [9], la distribuzione stazionaria, a equilibrio raggiunto. Le infinite costanti b_{2m-1} si debbono determinare in modo che sia soddisfatta l'ulteriore condizione, che all'istante iniziale $t=0$ (che supponiamo coincida con l'istante di chiusura del pozzetto) si abbia una distribuzione nota $n(x,0)$. Precisamente, posto

$$f(x)=n(x,0)-N_0\frac{e^{\alpha(l-x)}+e^{-\alpha(l-x)}}{e^{\alpha l}+e^{-\alpha l}} \qquad [11]$$

si trova

$$b_{2m-1}=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{(2\,m-1)\pi}{2\,l}x\,dx \qquad [12]$$

Circa il procedimento di calcolo della [10] e la convergenza della serie a 2° membro vedasi l'Appendice. I singoli termini della serie decrescono col tempo tanto più rapidamente quanto più è elevato m. Per $m=1$, $l=40$ cm, $D=0{,}1$ cm^2 sec^{-1} il coefficiente di t nel primo esponenziale vale $1{,}542.10^{-4}$ sec^{-1}, e quindi il suo reciproco 6485 sec$\approxeq$1,8 ore. Si ha perciò la seguente Tabella II di valori:

TABELLA II

t in ore	0	1,8	3,6	5,4	7,2	9,0
$e^{-\frac{t}{1,8}}$	1	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067

Gli altri termini della serie sono, come si è detto, soggetti a un decremento temporale maggiore. Sicché nell'ipotesi di una concentrazione di radon N_0 costante sul fondo del pozzetto, a 5-6 ore di distanza dall'istante iniziale di chiusura del pozzetto, in questo si stabilirebbe, per semplice diffusione, l'equilibrio di concentrazione del radon (a meno di qualche per cento), equilibrio caratterizzato, come si è detto commentando la Tabella I, da una concentrazione quasi uniforme in tutta l'estensione del pozzetto lungo 40 centimetri.

Ora, dai dati sperimentali e dai grafici delle figure 2 e 3 della nota citata, risulta che occorrono almeno 20-30 ore di chiusura perché si stabilisca nel pozzetto un valore di regime della concentrazione di radon: come c'è d'attendersi (ed è confermato dalle considerazioni fatte dagli AA. in una recente nota sulla esalazione del radon) [2], il processo di diffusione attraverso il terreno è assai più lento che non quello nel gas libero della cavità. Esso comporta una lenta variazione della concentrazione del radon sul fondo del pozzetto, variazione che il processo di diffusione nel pozzetto livella assai più rapidamente entro tutto il gas del pozzetto stesso. Sicché, in prima approssimazione, si può supporre che in ogni istante ci sia nel pozzetto chiuso una distribuzione della concentrazione pressoché in equilibrio col valore sul fondo; cioè, in conformità con i dati della Tabella I, una concentrazione praticamente uniforme in tutto il pozzetto (almeno per la lunghezza assegnata alla concamerazione di esperienza nella descrizione del metodo di misura, cioè 40 cm, su cui abbiamo fissato la nostra attenzione), la quale segue le variazioni che avvengono sul fondo. In altri termini, ciò equivale a prendere in considerazione il solo processo di diffusione che avviene attraverso il terreno verso il fondo del pozzetto (ipotesi *b*), come responsabile delle variazioni della concentrazione nell'interno del pozzetto stesso, concentrazione che è per altro praticamente uniforme in ogni istante (ipotesi *a*), almeno dopo un breve lasso di tempo dall'istante della chiusura del pozzetto.

Poiché, in aggiunta agli effetti sopra citati di variazioni delle condizioni meteorologiche, non sono da escludersi moti convettivi, di origine termica, interni al pozzetto, i quali, sovrapponendosi al processo di diffusione verso l'alto, accelerano l'omogeneizzazione della concentrazione di Radon nella massa d'aria, si deve ritenere che le considerazioni precedenti siano valevoli anche per lunghezze del pozzetto sensibilmente superiori a quella presa in esame.

APPENDICE

Il procedimento di calcolo della [10] è il seguente; anzitutto la [5] risulta soddisfatta da:

$$n^*(x,t)\, e^{-\alpha^2 Dt} = n^*(x,t)\, e^{-\lambda t} \qquad [a]$$

se per n^* vale l'equazione:

$$\frac{\partial^2 n^*}{\partial x^2} = \frac{1}{D}\frac{\partial n^*}{\partial t} \qquad [b]$$

Quanto a quest'ultima cerchiamone anzitutto una soluzione che soddisfi alle condizioni agli estremi:

$$\begin{cases} x=0 & n^*=0 \\ x=l & \dfrac{\partial n^*}{\partial x}=0 \end{cases} \quad \text{per } t \text{ qualsiasi} \qquad [c]$$

Col metodo delle soluzioni semplici si trova

$$n^* = a \cos\omega x + b \operatorname{sen}\omega x)\, e^{-\omega^2 Dt} \qquad [d]$$

Le condizioni agli estremi [c] fissano le costanti a ed ω: esse infatti impongono che sia

$$a=0 \qquad \omega l = (2m-1)\frac{\pi}{2} \qquad [e]$$

con m intero, sicché la soluzione assume la forma (scrivendo b_{2m-1} invece di b):

$$n^*_{2m-1} = b_{2m-1} \operatorname{sen} \frac{(2m-1)\pi}{2l} x.\, e^{-\frac{(2m-1)^2\pi^2}{4l^2}} \qquad [f]$$

Essendo la [b] lineare ed omogenea, ed omogenee le condizioni [c], la funzione

$$n^*(x,t) = \sum_1^{\infty} b_{2m-1} \operatorname{sen} \frac{(2m-1)\pi}{2l} x\,.\, e^{-\frac{(2m-1)^2\pi^2}{4l^2}Dt} \qquad [g]$$

se la serie converge, è ancora una soluzione soddisfacente alle [c], e contiene le infinite costanti arbitrarie b_{2m-1}. La $n^*(x, t)\, e^{-\lambda t}$ è perciò soluzione della [5], soddisfacente però alle condizioni [c] anziché alle [8]. Aggiungendo ad essa la soluzione stazionaria [9] (approfittando della linearità della [5]), otteniamo la soluzione [10], che soddisfa alle volute condizioni agli estremi [8].

Quanto alla convergenza della serie del secondo membro della [10] valgono le seguenti considerazioni concretate dopo una conversazione con il prof. S. Cinquini. Ricordiamo che nello sviluppo in serie di seni della funzione $f(x)$ data nell'intervallo $(0, \pi)$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx$$

i coefficienti b_n sono dati dalla relazione:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx$$

e che se la $f(x)$ è data in $(0,2l)$ i coefficienti dello sviluppo in serie di seni

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2l} x$$

sono

$$b_n = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2l} x \, dx \,.$$

Ciò premesso, conoscendo $f(x)$ nell'intervallo $(0, l)$ definiamo $f(x)$ nell'intervallo $(l, 2l)$ ponendo $f(x) = f(2l - x)$; allora i coefficienti dello sviluppo sono:

$$b_n = \frac{1}{l} \left[\int_0^{l} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2l} x \; dx + \int_l^{2l} f(2l - x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2l} x \; dx \right] =$$

$$= \frac{1}{l} \left[\int_0^{l} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2l} x \; dx - \int_l^{0} f(z) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2l} (2l - z) dz \right] =$$

$$= \frac{1}{l} \left[\int_0^{l} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2l} x \; dx + (-1)^{n-1} \int_0^{l} f(z) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2l} z \; dz \right] =$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ per } n \text{ pari} \\ \dfrac{2}{l} \displaystyle\int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2l} x \, dx \qquad \text{per } n \text{ dispari.} \end{cases}$$

Poniamo $n = 2m - 1$ abbiamo:

$$f(x) \sim \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m-1} \operatorname{sen} \frac{(2m-1)\pi}{2l} x \qquad [h]$$

ove

$$b_{2m-1} = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{(2m-1)\pi}{2l} x \, dx$$

Ora la funzione $n(x, 0)$ data dall'esperienza in $(0, l)$ è continua in tale intervallo; e la definiamo in $(l, 2l)$ *ponendo* $n(x, 0) = n(2l - x, 0)$, risulta continua in tutto $(0, 2l)$. Perciò anche la funzione $f(x)$ definita dalla [11] è continua in $(0, 2l)$; in virtù della prima delle [8] è

$$f(0) = 0,$$

ed anche, siccome risulta $n(2l, 0) = n(0,0) = N_0$,

$$f(2l) = 0.$$

Pertanto, definita $f(x)$ in $(-2l, 0)$, ponendo

$$f(x) = -f(-x),$$

la funzione dispari $f(x)$ risulta continua in $(-2l, 2l)$ e periodica con periodo $4l$.

Se $n(x, 0)$ ammette derivata finita in $(0, l)$, $f(x)$ risulta derivabile in tutto $(-2l, 2l)$, con eccezione al più dei punti $x = -2l$, $x = 0$, $x = 2l$, nei quali esistono finite le derivate destre e sinistre. E' quindi applicabile un caso particolare del criterio di Dini e in tutto $(0, l)$ la serie di Fourier [h] converge verso $f(x)$ in modo uniforme (*).

Infine, siccome per $t \geq 0$, è sempre

$$\left| e^{-\frac{(2m-1)^2 \pi^2}{4 l^2} D t} \right| \leq 1 \; ,$$

(*) Vedi per es. L. Tonelli, *Serie trigonometriche.* (Zanichelli, Bologna, 1928), cap. V, n. 102, c, pag. 281, e n. 110, pag. 302.

e siccome $e^{-\frac{(2m-1)^2\pi^2}{4l^2}Dt}$, per ogni $t \geq 0$, è funzione non crescente di $2m-1$ si conclude ([0]) che anche la serie

$$\sum_{1}^{\infty} b_{2m-1} \operatorname{sen} \frac{(2m-1)\pi}{2l} x \,.\, e^{-\frac{(2m-1)^2\pi^2}{4^2 l}Dt}$$

è uniformemente convergente, quando x varia in $(0, l)$ e t in un qualunque intervallo $(0, \bar{t})$ con $\bar{t} > 0$.

Istituto Nazionale di Geofisica — Osservatorio di Pavia.
Istituto di Fisica dell'Università — Torino.
Dicembre 1948.

RIASSUNTO

Presa in considerazione la interpretazione teorica data da uno di noi per l'andamento nel tempo della concentrazione del radon in pozzetto chiuso (pozzetto creato nel terreno per misure di radioattività dell'aria tellurica), si dimostra che le ipotesi semplificative poste a base della suddetta interpretazione sono legittime.

BIBLIOGRAFIA

(1) ALIVERTI G.: *Nuovo metodo per la misura del contenuto radioattivo dell'aria tellurica* - Rivista Geomineraria, 1, 1948; Annali di Geofisica, 2, 1948.

(2) ALIVERTI G. - LOVERA G.: *Sulla esalazione del radon dal suolo* - Annali di Geofisica, 1, 1949.

---

(0) Vedi per es. *op. cit.* in (*), cap. I, n. 13, pag. 40.