

# OSCILLAZIONI LIBERE DEL LAGO DI LEVICO

PIETRO CALOI

1. — Il lago di Levico, piccola azzurra distesa d'acqua, che prende il nome dalla vicina, ridente cittadina, è situato tra le Alpi Trentine. Il Dosso di Tenna lo separa dal lago di Caldonazzo, alquanto più esteso. I due laghi uniscono le loro acque, dando origine al Brenta che, prima di passare sonoro sotto il famoso ponte di Bassano ed impigrirsi nella pianura vicentina, lambisce il massiccio del Grappa.

La cornice intorno è quella possente delle Dolomiti, addolcita da selve di abeti, di pini, di larici. Le selve arrovesciate trovano, durante tre stagioni, tremulo, mutevole specchio nelle sue acque: e i riflessi sono di un verde tenero in primavera, intenso d'estate, variegato dalle macchie gialle dei larici, rosse dei faggi di primo autunno. Poi, il Dicembre porta i primi bianchi riflessi delle nevi e, a poco a poco, lo specchio perde la sua inquietudine, per fissarsi nel gelo dell'inverno.

La vicenda delle stagioni è, nel glauco occhio del lago di Levico, una delicata, varia vicenda di colori. Soltanto le stelle vi si riflettono con immutato splendore: nelle solitarie, serene notti alpine, l'incantevole piccolo scrigno culla, al ritmo di poche decine di secondi, i messaggi luminosi di immensi universi extra-galattici. Spazio e tempo, passato e presente, immensità e finitezza legati da un unico prodigio: luci di mondi lontani che danzano, come bianchi petali, su una minuscola superficie liquida, sperduta in una valle di un piccolo pianeta. Palpiti, armonie dell'inimitabile vita dell'Universo.

2. — Scopo di questo lavoro è il calcolo del ritmo di cui sopra.

Prima di passare ad una serie di sistematiche registrazioni limnografiche, che interesseranno pure il lago di Caldonazzo, ho ritenuto opportuno procedere al calcolo analitico dei periodi, dei nodi e dell'andamento delle ampiezze relativi ai possibili moti liberi del lago di Levico.

Per la deduzione degli elementi che intervengono nell'equazione di Chrystal, mi sono valso di una carta batimetrica del lago al 5000.

Il lago fu diviso in 28 sezioni, di 100 in 100 metri, a partire dall'estremo Sud. L'ultima sezione dista dall'estremo Nord 23 metri. Le

Rilievo batimetrico  
del LAGO DI LEVICO

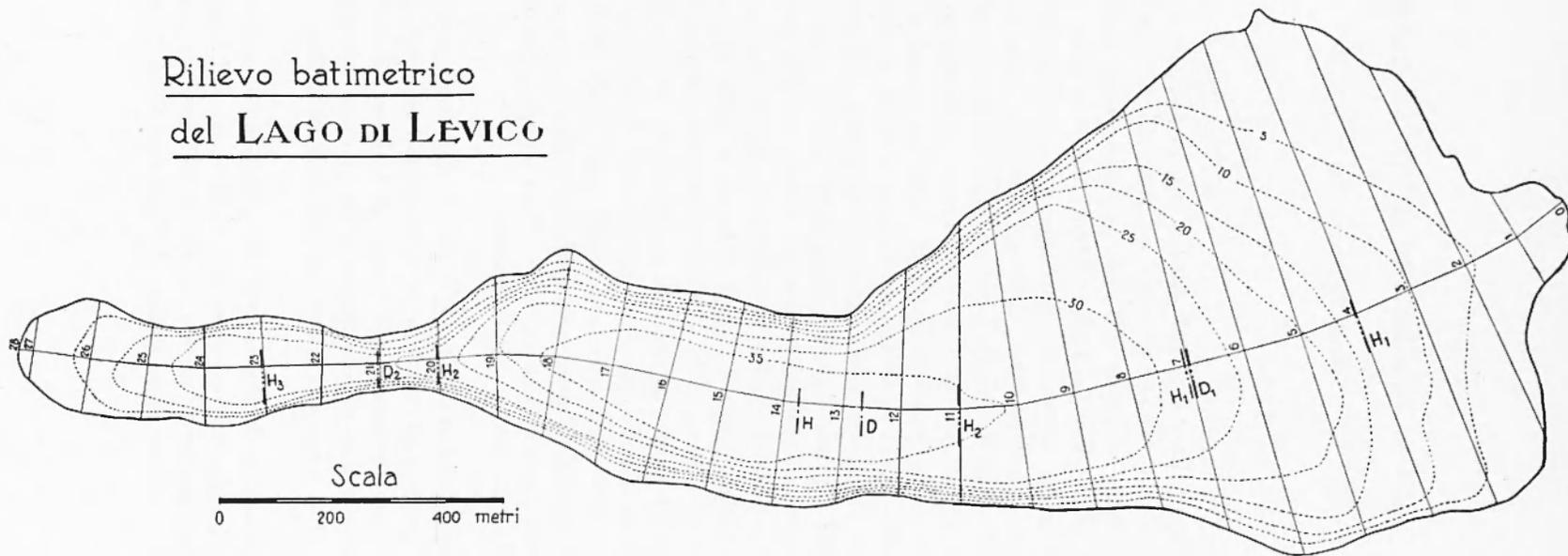


Fig. 1 - Batimetria del lago di Levico con sezioni trasversali normali alla linea di valle.

distanze delle singole sezioni sono state contate lungo la linea di valle (figg. 1 e 2).

La larghezza  $b(x)$  in superficie, delle sezioni praticate, l'area  $S(x)$

• Sezioni trasversali del lago •

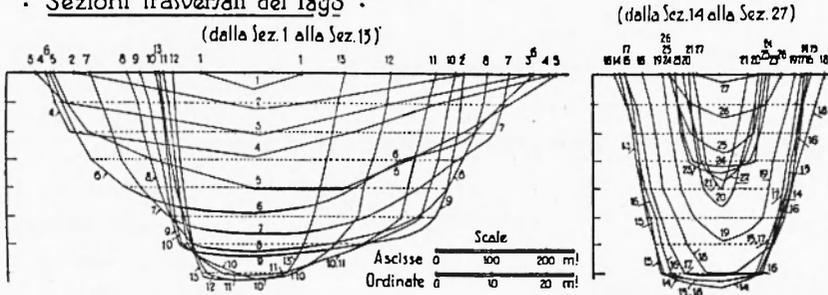


Fig. 2

delle medesime, l'area  $v(x)$  della superficie del lago fra una sezione e l'altra, l'area  $V(x)$  fra le singole sezioni — contate da 1 a 28 — e l'estremo Sud del lago e il valore della funzione  $\sigma(x)$ , pari al prodotto  $S(x) \cdot b(x)$ , per le 28 sezioni sono contenute nelle tabelle I e III.

La figura 3 dà la curva normale del lago, sulla scorta delle grandezze misurate.

Primo metodo. —

Estesi alla curva normale ottenuta il metodo di Chrystal dei tratti rettilinei raccordati.

La schematizzazione della curva normale è stata conforme alla

fig. 4. In essa  $O_1$  è origine del primo sistema di coordinate (contate positivamente  $x_1$  verso  $A_3$ ,  $y_1$  verso  $M$ ),  $O_2$  del secondo sistema di coordinate (contate positivamente  $x_2$  verso  $A_3$  e  $y_1$  verso  $N$ ). Col primo sistema verrà rappresentata la curva normale a sinistra di  $O_2$ , mentre il tratto di curva normale a destra di  $O_2$  sarà rappresentato con il secondo sistema. Poniamo

$$O_1 A_1 = a_1; O_1 A_2 = a_2; O_2 A_3 = a_3; O_1 M = h_1; O_1 P = p; O_1 O_2 = r; \\ O_2 Q = q; O_2 N = h_2.$$

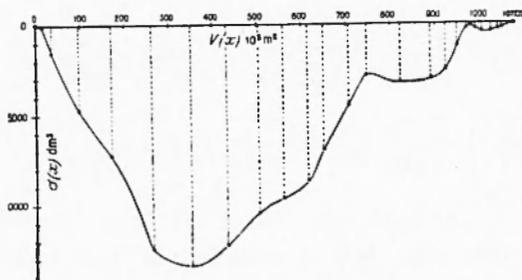


Fig. 3

Le coordinate di  $O_2$  rispetto al primo sistema saranno  $+r$ ,  $o$ .  
Le equazioni delle rette 1,2 saranno pertanto

$$h_1(x) = h_1 \left( 1 + \frac{x}{a_1} \right) \quad [1]$$

$$h_2(x) = h_1 \left( 1 - \frac{x}{a_2} \right), \quad [2]$$

mentre l'equazione della retta 3 (riferita al 2° sistema) sarà

$$h_3(x) = h_2 \left( 1 - \frac{x}{a_3} \right). \quad [3]$$

Vale inoltre la relazione

$$a_2 = r \frac{h_1}{h_1 - h_2}.$$

Poniamo, essendo  $n$  la pulsazione,

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \frac{2na_1}{\sqrt{gh_1}} \sqrt{1 + \frac{x}{a_1}}, \quad \alpha_1 = \frac{2a_1}{\sqrt{gh_1}}, \quad \beta_1 = \frac{2a_1}{\sqrt{gh_1}} \sqrt{1 + \frac{p}{a_1}}, \\ \omega_2 = \frac{2na_2}{\sqrt{gh_1}} \sqrt{1 - \frac{x}{a_2}}, \quad \alpha_2 = \frac{2a_2}{\sqrt{gh_1}}, \quad \beta_2 = \frac{2a_2}{\sqrt{gh_1}} \sqrt{1 - \frac{r}{a_2}}, \\ \omega_3 = \frac{2na_3}{\sqrt{gh_2}} \sqrt{1 - \frac{x}{a_3}}, \quad \alpha_3 = \frac{2a_3}{\sqrt{gh_2}}, \quad \beta_3 = \frac{2a_3}{\sqrt{gh_2}} \sqrt{1 - \frac{q}{a_3}}. \end{array} \right. \quad [4]$$

Le equazioni degli spostamenti, in senso orizzontale e verticale rispettivamente, divengono allora <sup>(1)</sup>

$$\begin{aligned} \xi_1 \omega_1 &= \left\{ A_1 J_1(\omega_1) + B_1 Y_1(\omega_1) \right\} \sin n(t - \tau), \\ \zeta_1 &= -\frac{h_1}{2a_1} \left\{ A_1 J_0(\omega_1) + B_1 Y_0(\omega_1) \right\} \sin n(t - \tau), \\ \xi_2 \omega_2 &= \left\{ A_2 J_1(\omega_2) + B_2 Y_1(\omega_2) \right\} \sin n(t - \tau), \\ \zeta_2 &= \frac{h_1}{2a_2} \left\{ A_2 J_0(\omega_2) + B_2 Y_0(\omega_2) \right\} \sin n(t - \tau), \end{aligned} \quad [5]$$

$$\xi_3 \omega_3 = \left\{ A_3 J_1(\omega_3) + B_3 Y_1(\omega_3) \right\} \sin n(t - \tau) ,$$

$$\zeta_3 = \frac{h_3}{2a_3} \left\{ A_3 J_0(\omega_3) + B_3 Y_0(\omega_3) \right\} \sin n(t - \tau) ,$$

dove  $A_1, B_1, \dots$  sono costanti e  $J, Y$  sono simboli di funzione di Bessel e di Neumann dell'argomento  $\omega$ .

Le prime quattro equazioni delle [5] si intendono riferite al primo sistema, le ultime due al secondo sistema di coordinate.

L'eliminazione delle costanti  $A_1, B_1, \dots$  che figurano in [5] può ottenersi tenendo conto delle condizioni ai limiti. Esse sono:

$$\text{per } x_1 = -p \quad , \quad \xi_1 = 0 \quad ; \quad \text{per } x_3 = q \quad , \quad \xi_3 = 0 \quad ; \quad [6]$$

$$\text{per } x_1 = 0 \quad , \quad \xi_1 = \xi_2 \quad , \quad \zeta_1 = \zeta_2 \quad . \quad [7]$$

Inoltre, per il punto  $O_2$ ,

$$x_1 = r \quad , \quad x_2 = 0 \quad ; \quad \xi_2 = \xi_3 \quad , \quad \zeta_2 = \zeta_3 \quad . \quad [8]$$

Per le [6] e le [4], dalle [5] conseguono i valori dei rapporti  $\frac{B_2}{A_1}, \frac{B_3}{A_3}$ .

Sostituiti questi ultimi nelle [5], tenendo conto delle [7], [8], fatte le posizioni

$$[9] \quad \begin{cases} J_1(n\alpha_i) Y_1(n\beta_i) - J_1(n\beta_i) Y_1(n\alpha_i) = P_1(\alpha_i, \beta_i) & i = 1 \text{ e } 3 \\ J_0(n\alpha_i) Y_1(n\beta_i) - J_1(n\beta_i) Y_0(n\alpha_i) = P_0(\alpha_i, \beta_i) & i = 1 \text{ e } 3 \end{cases}$$

osservato che  $\frac{\alpha_1}{a_2} = \frac{a_1}{a_2}$ , avremo

$$\frac{a_2}{a_1} \frac{A_1}{Y_1(n\beta_1)} P_1(\beta_1, a_1) = A_2 J_1(na_2) + B_2 Y_1(na_2)$$

$$\frac{\beta_2}{a_3} \frac{A_3}{Y_1(n\beta_3)} P_1(\beta_3, a_3) = A_2 J_1(n\beta_2) + B_2 Y_1(n\beta_2)$$

[10]

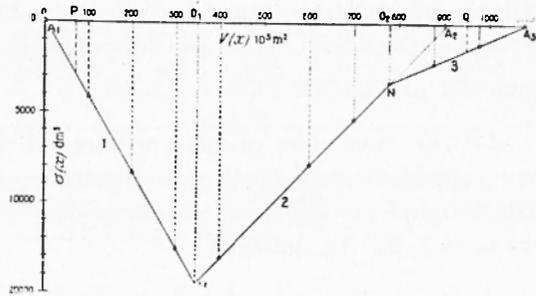


Fig. 4

$$-\frac{a_2}{a_1} \frac{A_1}{Y_1(n\beta_1)} P_0(\beta_1, \alpha_1) = A_2 J_0(n\alpha_2) + B_2 Y_0(n\alpha_2)$$

$$\frac{a_2}{a_3} \frac{h_2}{h_1} \frac{A_2}{Y_1(n\beta_3)} P_0(\beta_3, \alpha_3) = A_2 J_0(n\beta_2) + B_2 Y_0(n\beta_2).$$

Le [10] costituiscono un sistema di quattro equazioni omogenee nelle quattro incognite  $A_1, A_2, A_3, B_2$ ; la loro coesistenza comporta l'annullarsi del determinante dei coefficienti. Tale determinante contiene la sola incognita  $n$ ; il suo annullamento porta quindi all'equazione dei periodi  $T = \frac{2\pi}{n}$ .

Le [10] sono state calcolate nell'ipotesi che gli estremi  $A_1, A_3$  del lago coincidano con  $P, Q$  rispettivamente. In realtà, la curva normale termina in  $A_1, A_3$  ad angolo acuto. Va quindi posto, al limite,  $p = a_1, q = a_3$ . Ne consegue

$$\beta_1 = 0, \quad \beta_3 = 0.$$

Dalla teoria delle funzioni di Bessel si sa che

$$\lim_{\beta_1 \rightarrow 0} \frac{J_1(n\beta_1)}{Y_1(n\beta_1)} = 0.$$

Applicando questa proprietà ai coefficienti di  $A_1, A_3$  nelle [10], per  $\beta_1 \rightarrow 0, \beta_3 \rightarrow 0$  — tenuto debito conto delle [9] —, il determinante dei coefficienti nelle [10] diventa:

$$\begin{vmatrix} -J_1(n\alpha_1) & 0 & J_1(n\alpha_2) & Y_1(n\alpha_2) \\ 0 & -\frac{\beta_2}{\alpha_3} J_1(n\alpha_3) & J_1(n\beta_2) & Y_1(n\beta_2) \\ J_0(n\alpha_1) & 0 & J_0(n\alpha_2) & Y_0(n\alpha_2) \\ 0 & -\frac{a_2}{a_3} \frac{h_2}{h_1} J_0(n\alpha_3) & J_0(n\beta_2) & Y_0(n\beta_2) \end{vmatrix} = 0. \quad [11]$$

Fatte le posizioni

$$\begin{aligned} Q_0 &= J_0(n\beta_2) Y_0(n\alpha_2) - J_0(n\alpha_2) Y_0(n\beta_2) \\ Q_1 &= J_0(n\beta_2) Y_1(n\alpha_2) - J_1(n\alpha_2) Y_0(n\beta_2) \\ R_0 &= J_0(n\alpha_2) Y_1(n\beta_2) - J_1(n\beta_2) Y_0(n\alpha_2) \\ R_1 &= J_1(n\alpha_2) Y_1(n\beta_2) - J_1(n\beta_2) Y_1(n\alpha_2), \end{aligned} \quad [12]$$

TABELLA I

Sezioni	$\Delta x$	$S(x)$ $10^2 m^2$	$b(x)$ $m$	$v(x)$ $10^3 m^2$	$\sigma(x)$ $10^3 m^3$	$z = \frac{v}{a}$	$\frac{z^2(1-z)^2}{\sigma(z)}$ $10^{-9}$	$\Delta z$	$M = \frac{z^2(1-z)^2}{\sigma(z)} \Delta z$	$Mz$ $10^{-2}$	$Mz^2$ $10^{-2}$	$Mz^3$ $10^{-2}$	$Mz^4$ $10^{-2}$
0	0	0	0	0	0	0.1392	3,6885	.01392	5,1344	0,0715	0,0010	0,00001	0,00000
1	100	2,712	180	15,0	48,8	.03387	0,6843	.01995	1,3652	0,0462	0,0016	0,00005	0,00000
2	>	22,500	695	36,5	1563,7	.09047	1,4285	.05660	8,0853	0,7315	0,0661	0,0060	0,00054
3	>	53,250	890	97,5	4739,2	.15913	2,4570	.06866	16,8698	2,6845	0,4271	0,0680	0,0108
4	>	80,500	905	171,5	7285,2	.24403	3,7251	.08490	23,1361	5,6459	1,3777	0,3362	0,0820
5	>	138,750	900	263	12487,5	.32545	5,0117	.08142	29,4065	9,5703	3,1147	1,0137	0,3299
6	>	154,250	865	350,75	13342,6	.39967	6,4702	.07422	34,8982	13,9478	5,5746	2,2280	0,8905
7	>	163,250	750	430,75	12243,7	.46694	8,0834	.06727	39,5776	18,4070	8,6291	4,0293	1,8814
8	>	167,750	645	503,25	10529,6	.51890	9,6053	.05196	43,2819	22,7000	8,9615	4,6501	2,4130
9	>	164,0	530	613,75	8692,0	.56947	11,2488	.05057	46,5623	19,9038	11,3348	6,4548	3,6759
10	>	143,0	490	659,50	7007,0	.61192	12,775	.04245	49,8434	20,9047	12,7921	7,8278	4,7900
11	>	116,0	390	707,25	4524,0	.65623	15,7093	.03595	56,4749	32,7087	21,4046	14,0857	9,2435
12	>	85,0	340	746	2890,0	.69218	17,9785	.03619	61,1122	39,0908	27,0577	18,7288	12,9636
13	>	92,25	335	783	3090,3	.72651	19,4573	.03433	66,1122	31,8623	23,1484	16,8176	12,2182
14	>	99,50	330	822	3283,5	.76270	21,3155	.03155	70,5402	27,5428	21,0068	16,0219	12,2199
15	>	92,0	345	856	3174,0	.79425	23,1333	.03178	74,7156	21,0795	16,7423	13,2976	10,5615
16	>	97,75	315	890,25	3079,1	.82603	25,0145	.03085	78,4759	17,6054	14,5425	12,0125	9,9226
17	>	79,250	325	923,5	2575,6	.85688	26,9711	.02644	82,1122	15,4363	13,2270	11,3339	9,7118
18	>	53,250	240	952	1278,0	.88332	29,4804	.02644	85,7156	19,4075	17,1429	15,1427	13,3757
19	>	21,250	125	972	265,6	.90188	31,9785	.01856	89,4759	49,3469	44,5051	40,1383	36,2000
20	>	13,500	95	981,50	128,2	.91070	34,8982	.00882	93,2819	41,4149	37,7163	34,3483	31,2808
21	>	20,750	135	991,25	280,1	.91974	36,7065	.00904	97,0148	16,1777	14,8792	13,6850	12,5866
22	>	27,500	170	1006,75	467,5	.93412	38,9394	.01438	100,9193	10,8897	10,1723	9,5021	8,8761
23	>	23,0	170	1025,50	391,0	.95152	41,2488	.01438	104,7156	8,0919	8,5820	8,1660	7,7701
24	>	17,750	165	1040,25	292,8	.96520	43,2819	.01368	108,4759	5,0958	4,9184	4,7473	4,5820
25	>	14,250	195	1058,75	277,8	.98237	45,2488	.01171	112,2488	1,8215	1,7894	1,7578	1,7269
26	>	0,825	110	1075,75	9,07	.99814	47,0148	.00577	116,0715	0,5207	0,5198	0,5187	0,5179
27	>	0	0	1077,75	0	1,00000	48,8434	.00186	119,8434	0	0	0	0
28	23						681,5680		329,6950	448,2767		256,9182	207,8312
							$I_0$		$I_2$	$I_1$		$I_3$	$I_4$

l'equazione dei periodi diviene

$$\frac{\beta_2}{\alpha_2} J_1(n\alpha_3) \left[ J_1(n\alpha_1) Q_0 + J_0(n\alpha_1) Q_1 \right] + \frac{a_2}{a_3} \frac{h_2}{h_1} J_0(n\alpha_3) \left[ J_1(n\alpha_1) R_0 + J_0(n\alpha_1) R_1 \right] = 0. \quad [13]$$

La soluzione si presenta come un caso particolare di quella già da me ottenuta per il Verbano (<sup>2</sup>). La [13] è un'equazione trascendente in  $n$ : le sue radici, ci consentono di risalire ai periodi delle oscillazioni libere (sesse) del lago in esame.

Applichiamo il metodo descritto al lago di Leviso.

Determinate, con i dati della tabella I, le equazioni delle rette 1, 2, 3, si sono ottenuti i seguenti valori per le grandezze che caratterizzano la curva normale schematizzata:

$$a_1 = 345 ; a_2 = 560 ; a_3 = 300 ; r = 433 ; \\ h_1 = 14460 ; h_2 = 3330 ;$$

$a_1, a_2, a_3, r$  sono espressi in  $10^3 \text{ m}^2$ ;  $h_1, h_2$  in  $10^3 \text{ m}^3$ . Si ha inoltre:

$$\alpha_1 = 57,93 \text{ sec}; \alpha_2 = 94,04 \text{ sec}; \alpha_3 = 105,0 \text{ sec}; \beta_2 = 44,78 \text{ sec}; \\ \frac{\beta_2}{\alpha_3} = 0,4265; \frac{a_2}{a_3} \frac{h_2}{h_1} = 0,4299.$$

Con questi dati, si può senz'altro passare alla determinazione delle radici della [13], con l'ausilio delle [11] e [12].

I valori delle funzioni di Bessel e di Neumann furono tratti dalle tabelle di Jahnke-Emde.

Ecco i periodi corrispondenti alle prime tre soluzioni ottenute:

$$T_1 = 5^m,05 ; T_2 = 2^m,75 ; T_3 = 2^m,05 .$$

Tali quindi sono i periodi per le sesse uni - hi - e trinoidali, ottenuti con il metodo di Chrystal.

*Secondo metodo.* — Dopo il metodo di Chrystal, che dà forzatamente valori approssimativi per i periodi, date le schematizzazioni da esso richieste, ho ritenuto opportuno ricorrere al metodo di Hidaka, il quale generalmente consente di pervenire a valori di maggiore attendibilità.

Non starò ad esporre la teoria di detto metodo, da me riassunta ed ampliata in un precedente lavoro (3), al quale rimando il lettore.

Con riferimento a detto lavoro, mi limito a render noto che ho applicato il metodo per il caso  $m = 2$ .

I periodi delle sesse si traggono dalla formula

$$T = \frac{\pi 2a}{\sqrt{\lambda g}}, \quad [14]$$

dove  $a$  è la superficie del lago,  $g$  l'accelerazione di gravità e  $\lambda$  un parametro, il cui valore si trae da un'equazione di terzo grado in  $\lambda$  stesso. I coefficienti di tale equazione risultano dalla combinazione di certe grandezze  $I_0, I_1, I_2, I_3, I_4$ , che si possono dedurre dai dati che caratterizzano geometricamente il lago. Tali dati sono contenuti nella tabella I.

Con i valori per  $I_0, I_1, I_2, I_3, I_4$ , riportati in detta tabella, l'equazione di 3° grado in  $\lambda$  risulta della forma:

$$541,26 \lambda^3 - 279,37 \lambda^2 + 35,25 \lambda - 0,9524 = 0 .$$

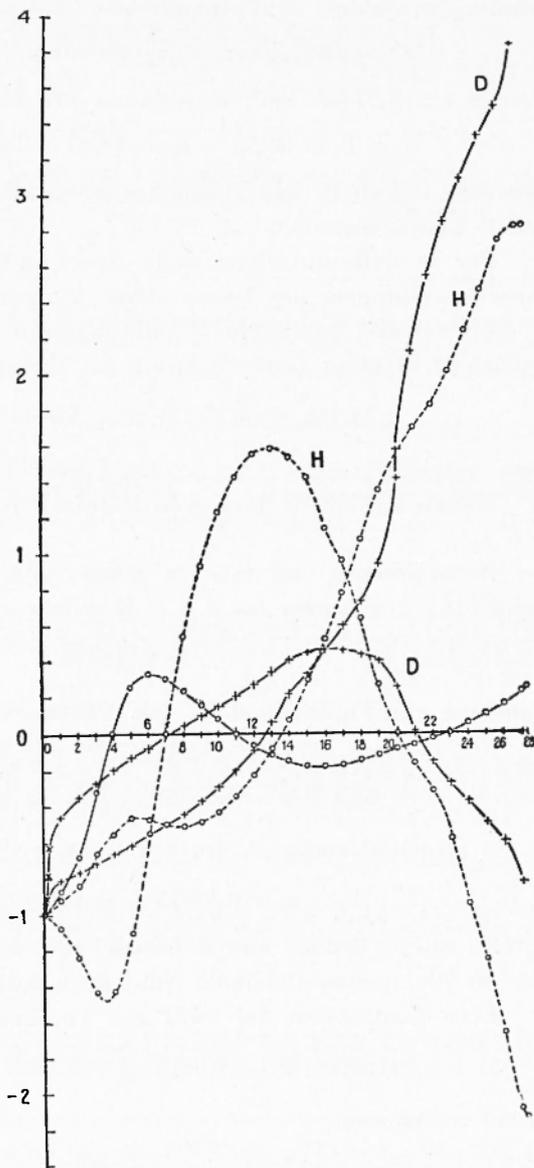


Fig. 5

Risolta l'equazione, si è ottenuto per  $\lambda$  i tre valori

$$\lambda_1 = 0.037191 ; \lambda_2 = 0.139301 ; \lambda_3 = 0.33965 .$$

Poiché  $a = 1,07775 \text{ km}^2$ , conseguono per la [14]

$$T_1 = 5^m,91 ; T_2 = 3^m,05 ; T_3 = 1^m,95 ,$$

che sono i periodi delle prime tre sesse del lago di Levico, ottenute con il nuovo metodo.

Per la determinazione delle linee nodali, mi sono valso delle formule sviluppate nel lavoro citato (3), per il caso  $m = 2$ .

Procedendo nel modo là indicato, sono pervenuto alla seguente equazione di terzo grado, valevole per l'oscillazione libera uninodale,

$$14,136 z^3 - 15,171 z^2 + 5,046 z - 1 = 0 , \quad [15]$$

dove  $z = v/a$ .

Hanno significato fisico solo le soluzioni della [15] comprese fra 0 e 1.

Naturalmente, nel caso in esame, una sola delle tre soluzioni della [15] è compresa fra 0 e 1. Essa vale

$$z = 0,711145 .$$

Consegue che l'uninodo dista dall'estremo Sud m 1355.

Per la sessa binodale, l'equazione dei nodi è risultata:

$$33,472 z^3 - 40,767 z^2 + 8,442 z + 1 = 0 ,$$

le cui soluzioni comprese fra 0 e 1 sono:

$$z_1 = 0,39955 ; z_2 = 0,90135 .$$

Da ciò si deduce che il binodo Sud dista dall'estremo Sud del lago m 700, mentre il binodo Nord dista dallo stesso estremo m 1997.

Ecco l'equazione dei nodi per l'oscillazione libera trinodale

$$11,1844 z^3 - 19,0815 z^2 + 9,1288 z - 1 = 0 ,$$

le cui radici sono

$$z_1 = 0,15544 ; z_2 = 0,61424 ; z_3 = 0,93640 .$$

Le distanze dall'estremo Sud sono pertanto:

per il trinodo Sud	m	395;
» » » medio	»	1105;
» » » Nord	»	2514.

TABELLA III

Sezioni	$T=5^m,8 ; \alpha \cdot \Delta x=3,32303 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$					$T=3^m,4 ; \alpha \cdot \Delta x=9,67013 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$				
	$S(\cdot)$ 10 <sup>6</sup> cm <sup>2</sup>	$v(\lambda)$ 10 <sup>7</sup> cm <sup>2</sup>	$q$ 10 <sup>10</sup> cm <sup>3</sup>	$2 \xi_0$ 10 <sup>3</sup> cm	$2 \Delta \eta_0$ cm	$2 \eta_0$ cm	$q$ 10 <sup>10</sup> cm <sup>3</sup>	$2 \xi_0$ 10 <sup>3</sup> cm	$2 \Delta \eta_0$ cm	$2 \eta_0$ cm
0	0	0	0	0	—	100	0	0	0	100
1	2,712	15,0	1,5	— 5,531	— 18,38	81,62	+ 1,50	— 5,531	— 53,49	+ 46,51
2	22,500	21,5	3,25	— 1,444	— 4,80	76,82	+ 2,50	— 1,111	— 10,74	+ 35,77
3	53,250	61,0	7,94	— 1,491	— 4,95	71,87	+ 4,68	— 8,79	— 8,50	+ 27,27
4	80,500	74,0	13,26	— 1,647	— 5,47	66,40	+ 6,70	— 8,32	— 8,05	+ 19,22
5	138,750	91,5	19,34	— 1,394	— 4,63	61,77	+ 8,46	— 6,10	— 5,90	+ 13,32
6	154,250	87,75	24,76	— 1,605	— 5,33	56,44	+ 9,63	— 6,24	— 6,03	+ 7,29
7	163,250	80,0	29,28	— 1,794	— 5,96	50,48	+ 10,21	— 6,25	— 6,04	+ 1,25
8	163,250	72,5	32,94	— 2,018	— 6,71	43,77	+ 10,30	— 6,31	— 6,10	+ 4,85
9	167,750	56,0	35,39	— 2,110	— 7,01	36,76	+ 10,03	— 5,98	— 5,78	— 10,63
10	164,0	54,5	37,39	— 2,280	— 7,58	29,18	+ 9,45	— 5,76	— 5,57	— 16,20
11	143,0	45,75	38,72	— 2,708	— 9,00	20,18	+ 8,71	— 6,09	— 5,89	— 22,09
12	116,0	47,75	39,68	— 3,421	— 11,37	8,81	+ 7,66	— 6,60	— 6,38	— 28,47
13	85,0	38,75	40,02	— 4,708	— 15,64	—	+ 6,56	— 7,72	— 7,47	— 35,94
14	92,25	37,0	39,77	— 4,311	— 14,33	— 21,16	+ 5,23	— 5,67	— 5,48	— 41,42
15	99,50	39,0	38,94	— 3,914	— 13,01	— 34,17	+ 3,61	— 3,51	— 3,51	— 44,93
16	92,0	34,0	37,78	— 4,107	— 13,65	— 47,82	+ 2,08	— 2,26	— 2,19	— 47,12
17	97,75	34,25	36,14	— 3,697	— 12,29	— 60,11	+ 0,47	— 0,481	— 0,47	— 47,59
18	79,25	33,25	34,14	— 4,308	— 14,32	— 74,43	— 1,11	+ 1,140	+ 1,35	— 46,24
19	53,25	28,5	32,02	— 6,013	— 19,98	— 94,41	— 2,43	+ 4,56	+ 4,41	— 41,83
20	21,25	20,0	30,13	— 14,179	— 47,12	— 141,53	— 3,27	+ 15,59	+ 14,88	— 26,95
21	13,5	9,5	28,79	— 21,326	— 70,87	— 212,40	— 3,53	+ 26,15	+ 25,29	— 1,66
22	20,75	9,75	26,72	— 12,877	— 42,79	— 255,19	— 3,55	+ 1,711	+ 16,55	+ 14,89
23	27,5	15,5	22,76	— 8,276	— 27,50	— 282,69	— 3,32	+ 1,207	+ 11,67	+ 26,56
24	23,0	18,75	17,46	— 7,591	— 25,23	— 307,92	— 2,82	+ 1,226	+ 11,86	+ 38,42
25	17,75	14,75	12,92	— 7,279	— 24,19	— 332,11	— 2,25	+ 1,268	+ 12,36	+ 50,68
26	14,25	18,5	6,78	— 4,758	— 15,81	— 347,92	— 1,31	+ 9,19	+ 8,89	+ 59,57
27	0,825	17,0	0,87	— 10,545	— 35,04	— 382,96	— 0,30	+ 3,636	+ 35,16	+ 94,73
28	0	2,0	0,10							

Per quanto concerne l'andamento degli spostamenti verticali, lungo il lago, in corrispondenza della linea di valle, valgono le seguenti tre equazioni:

$$\zeta^I = \zeta/A_0 a = 14,136 z^3 - 15,171 z^2 + 5,046 z - 1 \quad \text{per la sessa uninodale}$$

$$\zeta^{II} = \zeta/A_0 a = -33,472 z^3 + 40,767 z^2 - 8,442 z - 1 \quad \text{» » » binodale}$$

$$\zeta^{III} = \zeta/A_0 a = 11,1844 z^3 - 19,0815 z^2 + 9,1288 z - 1 \quad \text{» » » trinodale.}$$

La tabella II dà l'andamento degli spostamenti verticali per le tre sesse, di sezione in sezione, prendendo uguale a 1 lo spostamento iniziale all'estremo Sud. La fig. 5 riporta i grafici relativi.

TABELLA II

Sez.	$z$	$\zeta^I$	$\zeta^{II}$	$\zeta^{III}$
0	0	-1	-1	-1
1	.01392	-. 933	-1,110	-.877
2	.03387	-. 846	-1,240	-.708
3	.09047	-. 667	-1,455	-.322
4	.15913	-. 581	-1,446	+ .015
5	.24403	-. 467	-1,119	+ .254
6	.32545	-. 477	-. 583	+ .335
7	.39967	-. 512	+ . 001	+ .315
8	.46694	-. 512	+ . 539	+ .241
9	.51890	-. 491	+ . 934	+ .162
10	.56947	-. 436	+1,232	+ .076
11	.61192	-. 354	+1,430	+ .004
12	.65623	-. 227	+1,557	-.066
13	.69218	-. 088	+1,588	-.114
14	.72651	+ . 079	+1,549	-.151
15	.76270	+ . 295	+1,425	-.175
16	.79425	+ . 520	+1,241	-.183
17	.82603	+ . 784	+ . 977	-.175
18	.85688	+1,078	+ . 640	-.151
19	.88332	+1,363	+ . 282	-.116
20	.90188	+1,581	-. 007	-.076
21	.91070	+1,690	-. 159	-.065
22	.91974	+1,806	-. 321	-.044
23	.93412	+1,998	-. 596	-.006
24	.95152	+2,244	-. 959	+ .045
25	.96520	+2,448	-1,267	+ .091
26	.98237	+2,718	-1,684	+ .156
27	.99814	+3,005	-2,096	+ .223
28	1	+3,011	-2,147	+ .232

*Terzo metodo.* — Ho applicato infine il metodo di Defant. Anche di tale metodo fu dato un riassunto in un mio precedente la-

voro (1). Mi limito qui a dare il significato dei simboli, che figurano nella tabella III. In essa,  $\alpha = \frac{4\pi^2}{gT^2}$ ,  $\Delta x$  è l'intervallo fra sezione e sezione;  $2\xi_0$ ,  $2\eta_0$  sono le ampiezze delle oscillazioni lungo il lago, nei due sensi orizzontale e verticale rispettivamente;  $2\Delta\eta_0$  la variazione dello spostamento verticale da una sezione alla successiva;  $q=2\eta_0v(x)$  ed asprime il volume d'acqua che nel tempo  $T/4$ , fra la quiete e l'estremo spostamento di una particella, passa attraverso la sezione  $S(x)$ .

Evidentemente, il valore del periodo  $T$  della sessa considerata coinciderà con l'esatto periodo d'oscillazione del lago quando, in corrispondenza dell'ultima sezione, si abbia  $q = 0$ .

Per la sessa uninodale, per  $T = 6^m$  si è avuto il residuo  $q = 2,38 \cdot 10^{10} \text{ cm}^3$ , mentre per  $T = 5^m,7$  il residuo è stato  $q = -1,02 \cdot 10^{10} \text{ cm}^3$ . Per  $T = 5^m,8$  (tab. III) il residuo è risultato praticamente nullo.

Per l'oscillazione binodale, il residuo corrispondente a  $T = 3^m,3$  è risultato  $q = +0,61 \cdot 10^{10} \text{ cm}^3$  mentre per  $T = 3^m,4$  si è avuto  $q = -0,11 \cdot 10^{10} \text{ cm}^3$  (tab. III).

In conclusione, con il metodo di Defant si è ottenuto  $T = 5^m,8$  per l'uninodale e  $T = 3^m,4$  per la binodale.

La fig. 5 dà la posizione dei nodi e l'andamento degli spostamenti lungo il lago, per le due sesse considerate con il metodo di Defant.

3. — I risultati della ricerca teorica relativa alle sesse del lago di Levico sono riassunti nel seguente specchietto.

Oscillazioni libere	Primo metodo (Chrystal)	Secondo metodo (Hidaka)	Terzo metodo (Defant)
<i>uninodale</i> { periodo nodo (dall'estremo Sud)	5 <sup>m</sup> ,05	5 <sup>m</sup> ,91	5 <sup>m</sup> ,8
	—	1355 metri	1256 metri
<i>binodale</i> { periodo I° binodo	2 <sup>m</sup> ,75	3 <sup>m</sup> ,05	3 <sup>m</sup> ,4
	—	700 metri	720 metri
<i>trinodale</i> { II° binodo periodo trinodo Sud	—	1997 metri	2110 metri
	2 <sup>m</sup> ,05	1 <sup>m</sup> ,95	—
	—	395 metri	—
trinodo medio	—	1105 metri	—
	—	2514 metri	—
trinodo Nord	—	—	—

Le registrazioni permetteranno di stabilire quale dei risultati ottenuti è più prossimo alle caratteristiche delle oscillazioni reali.

*Roma - Istituto Nazionale di Geofisica - Gennaio 1951.*

### RIASSUNTO

*In questa prima parte del lavoro dedicato allo studio delle oscillazioni libere del lago di Levico, vengono riassunti i risultati dell'applicazione di tre distinti metodi analitici alla determinazione dei periodi, dei nodi e dell'andamento delle ampiezze, relativi alle prime tre sesse del lago. I risultati sono in buon accordo tra loro.*

*Ci riserviamo di completare lo studio non appena avremo ottenuto una opportuna serie di registrazioni limnografiche.*

### BIBLIOGRAFIA

- <sup>1</sup> CALOI P., *Le sesse del lago di Garda. Parte II.* Annali di Geofisica, I, 2 (1948).
- <sup>2</sup> CALOI P., *Sui periodi di oscillazione libera del Verbano.* Annali di Geofisica, I, 3 (1948).
- <sup>3</sup> CALOI P., *Le sesse del lago di Garda. Parte I.* Annali di Geofisica, I, 1 (1948).