

(Istituto Nazionale di Geofisica, Roma.)

## Teoria delle Onde di Rayleigh in Mezzi elastici e firmo-elastici, esposta con le Omografie vettoriali.

Di

Pietro Caloi.

Con 3 figure.

**Riassunto.** Il lavoro pubblicato da Lord RAYLEIGH, nel 1885, sulla propagazione delle onde alla superficie di un mezzo elastico, isotropo, indefinito è stato fonte di ulteriori ricerche vaste e numerose. Qui si espone la teoria classica delle onde di RAYLEIGH valendosi delle omografie vettoriali. Si passa poi ad estendere la teoria ad un mezzo elastico, che ammetta attrito interno (firmo-viscosità). Ciò consente di pervenire ai seguenti risultati:

1. La velocità di propagazione delle onde di RAYLEIGH in un mezzo firmo-elastico, da un valore teoricamente infinito per periodi nulli, tende rapidamente, per periodi crescenti, al valore che le compete in mezzi puramente elastici, tanto più rapidamente quanto maggiore è il valore del rapporto  $\mu/\mu'$  ( $\mu$  = costante di Lamé;  $\mu'$  = coefficiente d'attrito interno equivoluminale).

2. La firmo-viscosità determina una sensibile riduzione della componente verticale del moto, riduzione che è tanto maggiore, quanto più piccoli sono il rapporto  $\mu/\mu'$  e il periodo proprio dell'onda: per onde originanti con grossi periodi, l'azione dell'attrito interno sul rapporto delle ampiezze è pressochè nulla e il mezzo si comporta come puramente elastico. La firmo-viscosità può variare il rapporto delle ampiezze  $Z/H$  da un valore prossimo all'unità (1.05) a 1.47, valore che la teoria di RAYLEIGH assegna a quel rapporto per  $\lambda = \mu$ .

3. Anche in un mezzo firmo-viscoso, le onde tipo RAYLEIGH costringono le particelle raggiunte su traiettorie ellittiche; però, a differenza di quanto avviene in un mezzo puramente elastico, tali traiettorie non sono riferite ai propri assi. Solo per periodi infinitamente piccoli o infinitamente grandi, le traiettorie ellittiche tendono a quelle riferite ai propri assi.

4. La ricerca ha consentito di chiarire un altro aspetto della propagazione delle onde superficiali, finora rimasto insoluto. Nella classica teoria di RAYLEIGH, le onde che portano il suo nome sono considerate come libere, persistenti, non soggette ad assorbimento da parte del mezzo. L'osservazione prova invece che l'assorbimento è fortissimo per i periodi più piccoli e tende

a decrescere rapidamente, per raggiungere il valore di circa  $e^{-0.0003}$  per periodi dell'ordine di 20 s. La nuova teoria prova che in un mezzo fermo-viscoso (con un rapporto  $\mu/\mu' = 50 \text{ sec}^{-1}$ , conforme alla media dei valori osservati) ciò è pienamente dimostrato: da un assorbimento elevatissimo per piccoli periodi, passando a periodi dell'ordine di 20 s e per  $\mu/\mu' = 50$ , il coefficiente d'assorbimento diviene dell'ordine di 0.0003, che è appunto quello generalmente osservato.

**Zusammenfassung.** Die im Jahre 1885 von Lord RAYLEIGH veröffentlichte Arbeit über die Fortpflanzung von Wellen auf der Oberfläche eines elastischen, isotropen und unbegrenzten Mediums ist zum Ausgangspunkt für zahlreiche und ausgedehnte Untersuchungen geworden. An dieser Stelle wird zunächst die klassische Wellentheorie von RAYLEIGH dargelegt, die auf vektoriellen Homographien beruht, und darauf auf ein elastisches Medium ausgedehnt, in welchem innere Reibung zugelassen wird (Fest-Elastizität). Daraus werden folgende Resultate abgeleitet:

1. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit RAYLEIGH'scher Wellen in einem fest-elastischen Medium strebt von einem theoretisch unendlichen Wert für verschwindend kurze Schwingungsdauer für wachsende Perioden schnell dem Werte zu, der einem rein elastischen Medium entspricht; diese Änderung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit verläuft parallel dem Wert des Quotienten  $\mu/\mu'$  (wo  $\mu$  die LAMÉ'sche Konstante und  $\mu'$  der Koeffizient der inneren Reibung bei gleichem Volumen ist). Dieser innere Reibungseffekt wurde neuerdings von den Japanern IKEGAMI und KISHINOUE auf experimentellem Wege bestätigt.

2. Die Fest-Viskosität erzeugt eine merkliche Reduktion der Vertikal-komponente der Bewegung, die um so größer wird, je kleiner der Quotient  $\mu/\mu'$  und die Eigenperiode der Welle ist. Für Wellen, die mit großen Perioden einsetzen, ist die Wirkung der inneren Reibung auf das Amplitudenverhältnis beinahe Null und das Medium verhält sich wie rein elastisch. Die Fest-Viskosität kann das Amplitudenverhältnis  $Z/H$  von einem Wert nahe der Einheit (1,05) bis zum Wert 1,47 variieren lassen, der nach der Theorie von RAYLEIGH für  $\lambda = \mu$  gilt.

3. Auch in einem fest-zähen Medium befolgen bei RAYLEIGH-Wellen die bewegten Teilchen elliptische Bahnen; doch beziehen sich diese Bahnen, im Gegensatz zu dem Verhalten in einem rein elastischen Medium, nicht auf die eigenen Achsen. Nur für unendlich kleine oder unendlich große Schwingungsdauer streben die elliptischen Bahnen einer Orientierung auf die eigenen Achsen zu.

4. Die vorliegende Untersuchung hat zur Abklärung eines bisher noch ungelösten Problems der Fortpflanzung von Oberflächenwellen geführt. In der klassischen Theorie von RAYLEIGH werden die nach ihm benannten Wellen als frei, persistent und keiner Absorption von Seiten des Mediums unterworfen angesehen. Die Beobachtung beweist dagegen, daß die Absorption für kleinere Schwingungsdauer besonders groß ist, mit wachsender Periode schnell abnimmt und für eine Periode von etwa 20 sec den Wert von zirka  $e^{-0.0003}$  annimmt. Aus der neuen Theorie läßt sich eindeutig beweisen, daß in einem fest-zähen Medium (mit einem dem Mittel der Beobachtungsergebnisse entsprechenden Quotienten  $\mu/\mu' = 50 \text{ sec}^{-1}$ ) der Absorptionskoeffizient von sehr hohen Werten für kleine Perioden beim Übergang zu einer Schwingungsdauer von 20 sec bei  $\mu/\mu' = 50$  die Größenordnung 0,0003 annimmt, was gerade den Beobachtungsergebnissen entspricht.

**Summary.** Lord RAYLEIGH's publication of 1885 on the propagation of waves at the surface of an elastic, isotrope and infinite medium has become the origin of numerous and exhaustive investigations. The classic wave theory of RAYLEIGH, founded on the vectorial homographies, is exposed in the present paper and then extended to an elastic medium admitting internal friction (firmo-viscosity). This leads to the following results:

1. The speed of propagation of RAYLEIGH waves in a firmo-elastic medium tends from a theoretically infinite value for periods quasi nil, for increasing periods rapidly towards a value which corresponds to a purely elastic medium with increase of the quotient  $\mu/\mu'$  ( $\mu =$  constant of LAMÉ,  $\mu' =$  coefficient of internal friction at constant volume). This effect of internal friction has recently been confirmed in experimental method by the Japaneses IKEGAMI and KISHINOUE.

2. The firmo-viscosity produces a noticeable reduction of the vertical component of the motion; this reduction increases with the diminution of the quotient  $\mu/\mu'$  and the original period of the wave. For waves starting with great periods the effect of the internal friction on the ratio of the amplitudes is almost nil and the medium is like purely elastic. The firmo-viscosity can provoke variations of the ratio of the amplitudes  $Z/H$  from 1,05 to 1,47 which according to the RAYLEIGH theory must be valid for  $\lambda = \mu$ .

3. Even in a firmo-viscous medium the RAYLEIGH waves impose elliptic trajectories to the particles. But, contrary to the behaviour in a purely elastic medium, these trajectories do not refer to their own axes. Only for infinitely small or infinitely great periods of oscillation the elliptic trajectories tend towards an orientation on their own axes.

4. The present investigation leads to a clarification of a hitherto unsolved problem of the propagation of surface waves. In the classical theory of RAYLEIGH the waves which are called after his name are considered to be free, persistent and not subject to any absorption by the medium. But, the observation proves that the absorption for small periods of oscillation is particularly big, decreases rapidly with increasing period and for a period of about 20 sec takes the value of ca.  $e^{-0.0003}$ . It can be proved from the new theory that in a firmo-viscous medium (with a quotient  $\mu/\mu' = 50 \text{ sec}^{-1}$  corresponding to the mean value of the observational data) the coefficient of absorption has very high values for small periods, but takes a magnitude of 0.0003 for a period of 20 sec at  $\mu/\mu' = 50$ , what directly corresponds to the results of observations.

**Résumé.** Le travail publié par Lord RAYLEIGH en 1885 sur la propagation des ondes à la surface d'un milieu élastique, isotrope et indéfini a été à l'origine de recherches ultérieures, étendues et nombreuses. On expose ici la théorie classique de RAYLEIGH fondée sur les homographies vectorielles. On passe ensuite à la théorie étendue à un milieu élastique admettant un frottement intérieur (firmo-viscosité). Cela mène aux résultats suivants:

1° La vitesse de propagation des ondes de RAYLEIGH dans un milieu firmo-élastique, d'une valeur théoriquement infinie pour les périodes nulles, tend rapidement, pour les périodes croissantes, à la valeur qui lui correspond en un milieu purement élastique, d'autant plus rapidement que la valeur du rapport  $\mu/\mu'$  ( $\mu =$  constante de LAMÉ;  $\mu' =$  coefficient du frottement intérieur équivoluminal) est plus grande. Cette sorte d'effet du frottement intérieur a été tout récemment confirmé, par voie expérimentale, par les japonais IKEGAMI et KISHINOUE.

2° La firmo-viscosité provoque une sensible réduction de la composante verticale du mouvement, réduction qui est d'autant plus grande que le rapport  $\mu/\mu'$  et la période propre de l'onde sont plus petits: pour des ondes provenant de grandes périodes, l'action du frottement intérieur sur le rapport des amplitudes est presque nulle et le milieu se comporte comme s'il était purement élastique. L'action du frottement intérieur peut faire varier le rapport des amplitudes  $Z/H$  de la valeur 1.05 à celle de 1.47 que la théorie de RAYLEIGH assigne à ce rapport pour  $\lambda = \mu$ .

3° Même dans un milieu firmo-visqueux, les ondes du type RAYLEIGH imposent aux particules des trajectoires elliptiques; cependant, à la différence de ce qui arrive dans un milieu purement élastique, de telles trajectoires ne se réfèrent pas aux propres axes. Ce n'est que pour des périodes infiniment petites ou infiniment grandes que les trajectoires elliptiques tendent vers celles qui se réfèrent aux propres axes.

4° Cette étude a permis d'éclaircir théoriquement un autre aspect de la propagation des ondes superficielles jusqu'à présent resté non résolu. Dans la théorie classique de RAYLEIGH les ondes qui portent son nom sont considérées comme des ondes libres, persistantes, non sujettes à l'absorption de la part du milieu. Or, l'observation prouve que l'absorption de la part du milieu est très forte pour les périodes plus petites et tend à décroître rapidement pour atteindre la valeur de  $e^{-0.0003}$  environ pour des périodes de l'ordre de 20 s. La nouvelle théorie prouve que dans un milieu firmo-élastique (avec un rapport  $\mu/\mu' = 50 \text{ sec}^{-1}$  conforme à la moyenne des valeurs observées) cela est pleinement démontré: partant d'une absorption très élevée pour de petites périodes pour arriver à des périodes de l'ordre de 20 s et pour  $\mu/\mu' = 50$ , le coefficient d'absorption devient de l'ordre de 0.0003 qui est précisément celui généralement fourni par l'expérience.

## 1. Premesse sulle omografie vettoriali.

Si sa che è detta operazione vettoriale ogni operazione che muta un vettore in un altro; il simbolo con cui l'operazione viene indicata è detto operatore [I].

Un'operazione vettoriale lineare — tale cioè che soddisfi alle condizioni  $\alpha(m \vec{u}) = m \alpha \vec{u}; \alpha(\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \dots) = \alpha \vec{u}_1 + \alpha \vec{u}_2 + \dots$ , dove  $\alpha$  è un operatore ed  $\vec{u}, \vec{u}_1, \dots$  vettori — è detta *omografia*.

Fra i vari tipi di omografie vettoriali ricorderemo i seguenti:

1. *L'omografia assiale*, che trasforma un vettore nel suo ortogonale.

Se  $\alpha$  è un operatore ed  $\vec{a}$  un vettore, l'omografia assiale si indica col simbolo

$$\alpha = \vec{a} \Lambda.$$

Un vettore parallelo ad  $\vec{a}$  viene evidentemente trasformato in un vettore nullo.

2. Se  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  sono vettori, un'omografia per la quale

$$\alpha \vec{a} \times \vec{b} = \alpha' \vec{b} \times \vec{a}$$

è detta *omografia coniugata* di  $\alpha$ ; la indicheremo con  $K \alpha$ .

È detta *omografia simmetrica* o *dilatazione*, ogni omografia uguale alla sua coniugata.

È per definizione

$$D \alpha = \frac{1}{2} (\alpha + K \alpha)$$

la dilatazione di  $\alpha$ .

Una qualunque omografia può quindi scriversi identicamente

$$\alpha = \frac{1}{2} (\alpha + K \alpha) + \frac{1}{2} (\alpha - K \alpha).$$

Riguardo al secondo termine del secondo membro osserviamo quanto segue.

Si prova che un'omografia uguale alla propria coniugata cambiata di segno è un'assiale. Infatti, se  $\gamma$  è una tale omografia ( $\gamma = -K \gamma$ ) e se  $\vec{v}$  è un vettore, ricorrendo alla terna fondamentale  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , potremo scrivere

$$\vec{v} = (\gamma \vec{j} \times \vec{k}) \vec{i} + (\gamma \vec{k} \times \vec{i}) \vec{j} + (\gamma \vec{i} \times \vec{j}) \vec{k},$$

da cui

$$\vec{v} \wedge \vec{i} = \gamma \vec{i}, \quad \vec{v} \wedge \vec{j} = \gamma \vec{j}, \quad \vec{v} \wedge \vec{k} = \gamma \vec{k}.$$

è quindi un'assiale; un'assiale è quindi anche  $(\alpha - K \alpha)$ . Pertanto, ogni omografia è sempre la somma di una dilatazione e di un'assiale, l'una o l'altra potendo anche essere nulla.

L'assiale  $\frac{1}{2} (\alpha - K \alpha)$  può esprimersi nella forma canonica  $\vec{v} \wedge$ ; perciò, si può porre

$$\frac{1}{2} (\alpha - K \alpha) = V \alpha \wedge, \tag{1}$$

dove  $V \alpha$  è detto il vettore dell'omografia  $\alpha$ .

Fatta la posizione

$$\frac{1}{2} (\alpha + K \alpha) = D \alpha,$$

potremo scrivere

$$\alpha = D \alpha + V \alpha \wedge. \tag{2}$$

Il doppio vettore dell'omografia  $\frac{d\vec{u}}{dP}$  si chiama il *rotazionale* (o la *rotazione* o il *vorticale*) di  $\vec{u}$  e si indica, come è noto, con  $\text{rot } \vec{u}$ .

È dunque, per definizione,

$$\text{rot } \vec{u} = 2 V \frac{d\vec{u}}{dP} = 2 V \alpha,$$

da cui

$$\text{rot } \vec{u} \wedge = 2 V \alpha \wedge.$$

Ora, se  $\vec{s}(P)$  rappresenta una deformazione infinitesima, allora  $\alpha = \frac{d\vec{s}}{dP}$  è l'omografia della deformazione elastica.

Si ha quindi, per la (2),

$$D \frac{d\vec{s}}{dP} = \frac{d\vec{s}}{dP} - \frac{1}{2} \text{rot } \vec{s} \Lambda. \quad (3)$$

Per la (1) e la (3) è ancora

$$\frac{d\vec{s}}{dP} = \text{rot } \vec{s} \Lambda + K \frac{d\vec{s}}{dP}. \quad (4)$$

3. Ricordiamo ancora che si definisce come *isomeria* ogni omografia propria  $\sigma$  (non degenera), la cui coniugata sia uguale alla propria inversa:

$$K \sigma = \sigma^{-1}, \text{ cioè } K \sigma \cdot \sigma = 1.$$

Le isomerie lasciano invariati i moduli dei vettori e gli angoli che questi fanno tra loro.

4. Sia  $\alpha(P)$  un'omografia del punto  $P$ . Posto  $P = h \vec{a}$ , se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(P + h \vec{a}) - \alpha(P)}{h}$$

esiste, esso costituisce la derivata di  $\alpha$  rispetto  $\alpha P$ , nella direzione di  $\vec{a}$  e si indica con il simbolo  $\frac{d\alpha}{dP} \vec{a}$ .

La derivata di  $\alpha$  nella direzione dell'asse delle  $x$  si potrà quindi così rappresentare:  $\frac{d\alpha}{dP} \vec{i} = \frac{\partial \alpha}{\partial x}$ .

Si prova che

$$\vec{v} \times \vec{a} = \text{div} (k \alpha \vec{a}); \quad (5)$$

basta riferire  $\vec{v}$  ad una terna fondamentale, considerandolo come risultante delle sue derivate nella direzione dei tre assi  $x, y, z$ .

Assegnata un'omografia funzione di  $P$ ,  $\alpha(P)$ , esiste sempre un vettore  $\vec{v}$  soddisfacente alla (5). Tale vettore è detto il *gradiente* dell'omografia  $\alpha$ , per cui, per definizione,

$$\text{grad } \alpha \times \vec{a} = \text{div} (k \alpha \vec{a}).$$

Determiniamo ora il gradiente della (4).

Intanto, per  $\alpha = \vec{u} \Lambda$ ,

$$\text{grad } (\vec{u} \Lambda) \times \vec{a} = - \text{div} (\vec{u} \Lambda \vec{a}).$$

Dalla teoria dei vettori, e dall'essere  $\vec{a}$  un vettore costante, segue

$$\text{grad } (\vec{u} \Lambda) \times \vec{a} = - \vec{a} \times \text{rot } \vec{u}.$$

Per l'arbitrarietà di  $\vec{a}$  e facendo  $\vec{u} = \text{rot } s \Delta$ , si ottiene

$$\text{grad rot } s \Delta = - \text{rot rot } s. \quad (6)$$

Si ha inoltre, per essere  $\vec{dP}$  un vettore indipendente da  $P$ , e per la definizione di gradiente (in senso vettoriale),

$$\begin{aligned} \text{grad } K \frac{\vec{ds}}{dP} \times \vec{dP} &= d(\text{div } \vec{s}) \\ &= \text{grad div } \vec{s} \times \vec{dP}. \end{aligned}$$

Poichè  $\vec{dP}$  è un vettore qualunque, potremo quindi concludere

$$\text{grad } \frac{\vec{ds}}{dP} = - \text{rot rot } \vec{s} + \text{grad div } \vec{s}. \quad (7)$$

5. Si definiscono come invarianti I, II e III di un'omografia  $\alpha$ , i numeri reali relativi  $I_1 \alpha$ ,  $I_2 \alpha$ ,  $I_3 \alpha$ , funzioni della sola  $\alpha$ , tali che qualunque siano i vettori  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  si abbia sempre:

$$\begin{aligned} I_1 \alpha &= \frac{\vec{v} \Delta \vec{w} \times \alpha \vec{u} + \vec{w} \Delta \vec{u} \times \alpha \vec{v} + \vec{u} \Delta \vec{v} \times \alpha \vec{w}}{\vec{u} \Delta \vec{v} \times \vec{w}}, \\ I_2 \alpha &= \frac{\alpha \vec{v} \Delta \alpha \vec{w} \times \vec{u} + \alpha \vec{w} \Delta \alpha \vec{u} \times \vec{v} + \alpha \vec{u} \Delta \alpha \vec{v} \times \vec{w}}{\vec{u} \Delta \vec{v} \times \vec{w}}, \\ I_3 \alpha &= \frac{\alpha \vec{u} \Delta \alpha \vec{v} \times \alpha \vec{w}}{\vec{u} \Delta \vec{v} \times \vec{w}}. \end{aligned}$$

I rapporti a secondo membro delle espressioni di  $I_1 \alpha$ ,  $I_2 \alpha$ ,  $I_3 \alpha$  non dipendono dalla particolare terna di  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$ ; dipendono solo da  $\alpha$ . Donde la qualifica di invarianti di  $\alpha$  data alle tre grandezze  $I_1 \alpha$ ,  $I_2 \alpha$ ,  $I_3 \alpha$ .

Fra le notevoli proprietà dell'invariante terzo, va notata la seguente:

$$I_3(\beta \alpha) = I_3 \beta \cdot I_3 \alpha, \quad (8)$$

cioè l'invariante terzo di un prodotto è uguale al prodotto degli invarianti terzi dei singoli fattori, come si prova subito costruendo  $I_3 \beta$  sulla terna  $\vec{\alpha} i$ ,  $\vec{\alpha} j$ ,  $\vec{\alpha} k$ .

Se si sceglie per semplicità la terna fondamentale  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ , avremo per gli invarianti le espressioni

$$\begin{aligned} I_1 \alpha &= \alpha \vec{i} \times \vec{i} + \alpha \vec{j} \times \vec{j} + \alpha \vec{k} \times \vec{k}, \\ I_2 \alpha &= \alpha \vec{i} \Delta \alpha \vec{j} \times \vec{k} + \alpha \vec{j} \Delta \alpha \vec{k} \times \vec{i} + \alpha \vec{k} \Delta \alpha \vec{i} \times \vec{j}, \\ I_3 \alpha &= \alpha \vec{i} \Delta \alpha \vec{j} \times \alpha \vec{k}. \end{aligned} \quad (9)$$

Sia  $P = P(x, y, z)$ . Con riferimento alla terna fondamentale, poniamo

$$\vec{u}(x, y, z) = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}.$$

Per definizione è

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}.$$

Determiniamo l'invariante primo di  $\frac{d\vec{u}}{dP}$ . Si ha, dalla (9),

$$\begin{aligned} I_1 \frac{d\vec{u}}{dP} &= \frac{d\vec{u}}{dP} \vec{i} \times \vec{i} + \frac{d\vec{u}}{dP} \vec{j} \times \vec{j} + \frac{d\vec{u}}{dP} \vec{k} \times \vec{k} \\ &= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}, \end{aligned}$$

come si ottiene facilmente determinando le espressioni di  $\frac{d\vec{u}}{dP} \vec{i}$ ,  $\frac{d\vec{u}}{dP} \vec{j}$ ,  $\frac{d\vec{u}}{dP} \vec{k}$ .

Consegue

$$\operatorname{div} \vec{u} = I_1 \frac{d\vec{u}}{dP}. \quad (10)$$

### Omografia della deformazione elastica.

Sia  $\vec{s}$  il vettore-spostamento di un generico punto  $P$  di un corpo elastico, sottoposto a deformazione. Ad ogni valore della funzione vettoriale  $\vec{s}(P)$  corrisponderà una determinata deformazione.

Sia  $P_1 = P + d\vec{P}$  un punto infinitamente vicino a  $P$ ; e siano  $P'$  e  $P_1'$  i punti corrispondenti a  $P$  e a  $P_1$ , dopo la deformazione.

A meno di infinitesimi di ordine superiore, si ha

$$P_1' - P' = d\vec{P} + \frac{d\vec{s}}{d\vec{P}} d\vec{P}.$$

Resta così definita la deformazione della particella considerata. La corrispondenza fra gli elementi  $P_1 - P = d\vec{P}$  della particella indeformata e gli elementi  $P_1' - P' = d\vec{P}'$  della stessa particella, dopo la deformazione, dipende dall'omografia  $\frac{d\vec{s}}{d\vec{P}}$ , detta appunto *omografia della deformazione*. Indicandola con  $\alpha$  avremo

$$d\vec{P}' = (1 + \alpha) d\vec{P}. \quad (11)$$

L'elemento della deformazione si deduce quindi da quello indeformato, applicando a quest'ultimo l'omografia  $1 + \alpha$ .



Se  $\sigma$  è un'isomeria, funzione del punto  $P$ , e  $\varphi$  una dilatazione, si prova che

$$\sigma \varphi = 1 + \alpha. \quad (12)$$

L'isomeria  $\sigma$  rappresenta la *rotazione* della particella in  $P$ .

Poichè nell'identità ( $\varphi = 1$ ) è  $1 + \alpha = \sigma$ , la  $\varphi$  viene a rappresentare la pura *deformazione* (*strain* degli Inglesi; *Formänderung* dei Tedeschi). La pura *deformazione* (*dilatazione*), la *rotazione* (*isomeria*) e la *traslazione*  $P' - P$  costituiscono la più generale *deformazione* di una *particella* di un *corpo elastico deformato*.

### Dilatazione cubica e dilatazione lineare.

Si definisce come dilatazione cubica la variazione di volume, riferita all'unità di volume, subita da una particella. Identifichiamo quest'ultima con un parallelepipedo infinitesimo di spigoli  $\vec{d}_1 P$ ,  $\vec{d}_2 P$ ,  $\vec{d}_3 P$ . Siano  $\vec{d}_1 P'$ ,  $\vec{d}_2 P'$ ,  $\vec{d}_3 P'$  gli spigoli dopo la deformazione. Ricordando la (11), si ha allora per il coefficiente di dilatazione cubica l'espressione:

$$\vartheta = \frac{(1 + \alpha) \vec{d}_1 P \wedge (1 + \alpha) \vec{d}_2 P \times (1 + \alpha) \vec{d}_3 P}{\vec{d}_1 P \wedge \vec{d}_2 P \times \vec{d}_3 P} - 1.$$

Cioè, per definizione di invariante terzo,

$$1 + \vartheta = I_3 (1 + \alpha);$$

e ancora, per la (12) e la (8),

$$1 + \vartheta = I_3 \sigma \cdot I_3 \varphi.$$

Ma l'invariante terzo di un'omografia è uguale all'invariante terzo dell'omografia coniugata; perciò, essendo  $\sigma$  un'isomeria, è  $I_3 \sigma = 1$ . È pertanto

$$1 + \vartheta = I_3 \varphi.$$

Valendosi delle proprietà delle isomerie, si prova che, a meno di infinitesimi di ordine superiore, è

$$(1 + \vartheta)^2 = I_3 (1 + 2 D\alpha).$$

Sviluppando il secondo membro, in base alla definizione dell'operatore terzo, si ottiene infine, sempre a meno di infinitesimi di ordine superiore e ricordando la (10),

$$\vartheta = I_1 \alpha = I_1 \frac{d\vec{s}}{dP} = \text{div } \vec{s}. \quad (13)$$

Il coefficiente di dilatazione cubica in un punto è dato dal valore della divergenza dello spostamento in quel punto.

Passando al coefficiente di dilatazione lineare, osserviamo che in un punto  $P$  e nella direzione  $\vec{dP}$  esso è definito da

$$\varepsilon = \frac{\text{mod } \vec{dP}'}{\text{mod } \vec{dP}} - 1.$$

Fatto  $\vec{dP} = h \vec{a}$  ( $\vec{a}$ , vettore unitario), si ha per la (11)

$$\varepsilon = \text{mod } (\vec{a} + \alpha \vec{a}) - 1,$$

e per la (12)

$$1 + \varepsilon = \text{mod } \sigma \vec{\varphi} \vec{a} = \text{mod } \vec{\varphi} \vec{a},$$

in quanto, come si è visto, le isomerie conservano i moduli dei vettori. Sarà quindi

$$(1 + \varepsilon)^2 = \vec{\varphi} \vec{a} \times \vec{\varphi} \vec{a},$$

da cui, entro i limiti dell'approssimazione ammessa e ricordando che  $\vec{a}$  è vettore costante,

$$\varepsilon = \alpha \vec{a} \times \vec{a} = \frac{\vec{ds}}{dP} \vec{a} \times \vec{a}. \quad (14)$$

In una deformazione infinitesima, il coefficiente di dilatazione lineare, in un punto  $P$  e nella direzione  $\vec{a}$ , è uguale al prodotto scalare di  $\vec{a}$  per la derivata dello spostamento in quella direzione.

Siano  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  tre direzioni ortogonali ( $\vec{a} \wedge \vec{b} \times \vec{c} = 1$ ). Per la (13), la (9) e la (14) si ha:

$$\vartheta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad (15)$$

dove  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$  sono i coefficienti di dilatazione lineare nelle direzioni  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  uscenti da  $P$ .

### Relazione tra la omografia delle tensioni interne in un corpo elastico e l'omografia della deformazione infinitesima.

Sia  $D\alpha$  l'omografia della deformazione infinitesima in un punto  $P$  di un corpo elastico, omogeneo, isotropo, sottoposto all'azione di un sistema di forze, di massa (generalmente trascurabili) e di superficie, che lo conducono ad un nuovo stato di equilibrio.

Siano  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  le sue direzioni nel generico punto  $P$ . Se  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  sono i coefficienti di dilatazione lineare in  $P$  nelle direzioni considerate, avremo

$$D\alpha \vec{i} = a_1 \vec{i}, \quad D\alpha \vec{j} = a_2 \vec{j}, \quad D\alpha \vec{k} = a_3 \vec{k}.$$

Sia  $\beta$  la corrispondente omografia delle tensioni elastiche interne, conseguenti alla deformazione infinitesima. Siano  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  le pressioni unitarie agenti, secondo le direzioni  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ , su un parallelepipedo infinitesimo, opportunamente isolato. Per l'equilibrio, e grazie all'isotropia del corpo, dovrà essere

$$\beta \vec{i} = p_1 \vec{i}, \quad \beta \vec{j} = p_2 \vec{j}, \quad \beta \vec{k} = p_3 \vec{k}.$$

Ora, dalla teoria dell'elasticità, nel caso della validità della legge di Hooke, si sa che

$$p_i = -\lambda \vartheta - 2\mu a_i, \quad (i = 1, 2, 3)$$

dove  $\lambda$  e  $\mu$  sono le costanti di LAMÉ. Nel nostro caso, poichè  $\vartheta = a_1 + a_2 + a_3$ , sarà, per la (13),

$$\beta = -\lambda \operatorname{div} \vec{s} - 2\mu D\alpha, \quad (16)$$

oppure, per la (3),

$$\beta = -\lambda \operatorname{div} \vec{s} - 2\mu \frac{d\vec{s}}{dP} + \mu \operatorname{rot} \vec{s} A. \quad (17)$$

### Equazione fondamentale sulla propagazione del moto in un mezzo elastico, isotropo.

Un corpo elastico isotropo, di densità  $\rho$ , sia mantenuto in uno stato di deformazione da forze  $\rho \vec{F} ds$ , agenti sopra ogni elemento di massa  $\rho ds$ , e da altre forze  $\vec{R} d\sigma$ , agenti su elementi  $d\sigma$  della sua superficie libera.

Sia  $d\omega$  un elemento piano del corpo di centro  $P$ , la cui giacitura è individuata dal versore  $\vec{n}$ , che gli è normale in  $P$ . Esiste allora un'omografia  $\beta$ , funzione dei punti  $P$ , tale che il vettore  $\beta \vec{n} d\omega$  definisce la tensione elastica che si manifesta in  $P$ , attraverso l'elemento  $d\omega$ .

Se si pensa ad una porzione  $S$  del corpo, limitata dalla superficie  $\omega$ , per l'equilibrio nel primitivo stato di deformazione dovrà essere

$$\int_S \rho \vec{F} dS + \int_{\omega} \beta \vec{n} d\omega = 0, \quad (18)$$

$$\int_S (P - 0) A \rho \vec{F} dS + \int_{\omega} (P - 0) A \beta \vec{n} d\omega = 0. \quad (19)$$

Trasformando l'integrale di superficie in integrale di spazio, la (18) diviene

$$\int_S (\rho \vec{F} - \operatorname{grad} \beta) dS = 0,$$

che dovendo essere soddisfatta qualunque sia  $S$ , dà l'equazione di equilibrio sotto la forma

$$\rho \vec{F} = \operatorname{grad} \beta. \quad (20)$$

E poichè si prova che la (19) è identicamente soddisfatta, la (20) resta la sola condizione per l'equilibrio.

Sulla superficie libera del corpo dovrà naturalmente essere verificata, in ogni punto, la condizione  $\vec{R} = \beta \vec{n}$ .

Espressa in funzione delle costanti elastiche del corpo, vale per  $\beta$  la (16) o la (17). Per la (17), la (7) e la (6), la (20) si può scrivere

$$\rho \vec{F} + (\lambda + 2\mu) \text{grad div } \vec{s} - \mu \text{rot rot } \vec{s} = 0,$$

che è l'equazione cui deve soddisfare lo spostamento  $\vec{s}$  della deformazione infinitesima.

Dall'equazione d'equilibrio si passa a quella del moto mediante il principio di d'ALEMBERT, aggiungendo cioè alle forze applicate, le forze d'inerzia col segno cambiato, che per unità di volume, nel nostro caso,

sono  $-\rho \frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t^2}$ .

Si ha quindi infine

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t^2} = \rho \vec{F} + (\lambda + 2\mu) \text{grad div } \vec{s} - \mu \text{rot rot } \vec{s}, \quad (21)$$

che è l'equazione del moto. Tale equazione è di fondamentale importanza in tutte le teorie relative alla propagazione del moto, in un mezzo isotropo, elastico. Essa è soddisfatta, com'è noto, sia da onde irrotazionali, sia da onde equivoluminali.

## 2. Teoria vettoriale delle onde di Rayleigh, in un mezzo indefinito puramente elastico.

È ben noto lo studio fatto da Lord RAYLEIGH [2] sulla propagazione di particolari tipi di onde alla superficie di un mezzo puramente elastico, isotropo, indefinito. Tali onde subiscono uno smorzamento, più o meno accentuato, con la profondità. Esse risultano dalla sovrapposizione di due sistemi di onde proprie del mezzo, uno longitudinale e l'altro trasversale.

Supponiamo che l'asse  $z$  sia rivolto positivamente verso il semispazio occupato dal corpo elastico in questione.

Nella (21), equazione generale del moto, possiamo ritenere nulla la forza  $\vec{F}$  applicata all'elemento di massa.

Se indichiamo con  $a$  e  $b$  rispettivamente la velocità delle onde longitudinali e trasversali, la (21) può scriversi:

$$\frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t^2} = a^2 \text{grad div } \vec{s} - b^2 \text{rot rot } \vec{s}. \quad (22)$$

Poniamo

$$\vec{s} = [s_1(P) + \vec{u}(P)] e^{i p t}, \quad (23)$$

essendo  $p = \frac{2\pi}{T}$  la pulsazione del moto ( $T$ , periodo).

Se  $s_1$  rappresenta il vettore spostamento determinato dalle onde longitudinali e  $\vec{u}$  quello relativo alle onde trasversali, dovrà essere:

$$\text{rot } s_1 = 0, \quad \text{div } \vec{u} = 0. \quad (24)$$

La (23) sarà soddisfatta se  $\vec{s}_1$  ed  $\vec{u}$  vengono determinati in modo che risulti

$$a^2 \text{grad div } \vec{s}_1 = -p^2 \vec{s}_1, \quad b^2 \text{rot rot } \vec{u} = p^2 \vec{u}. \quad (25)$$

Se  $\vartheta$  è uno scalare e  $\vec{c}$  un vettore costante, poniamo

$$\vec{s}_1 = \text{grad } \vartheta, \quad \text{con } \vartheta = e^{(P-0) \times \vec{c}}.$$

Avremo allora

$$\vec{s}_1 = \vartheta \vec{c}.$$

Sarà inoltre, poichè  $\text{div } \vec{c} = 0$ ,

$$\text{div } \vec{s}_1 = \text{grad } \vartheta \times \vec{c}.$$

È inoltre

$$\text{grad div } \vec{s}_1 = c^2 \vartheta \vec{c},$$

perciò, la prima delle (25) diviene

$$c^2 = -\frac{p^2}{a^2}.$$

$\vec{c}$  è quindi un vettore immaginario.

Se  $x y$  è il piano limite superficiale, possiamo quindi scrivere, in forma esplicita,

$$\vec{s}_1 = e^{-hz} \cdot e^{i(mx + ny)} \cdot \vec{c}.$$

Si ha ancora

$$\begin{aligned} c^2 &= (\text{grad } \vartheta / \vartheta)^2 \\ &= (-hk + imi + inj)^2. \end{aligned}$$

Consegue

$$h^2 - m^2 - n^2 = -p^2/a^2. \quad (26)$$

Se  $\vec{\tau}$  e  $\vec{c}^1$  sono vettori costanti, poniamo analogamente

$$\vec{u} = \vartheta_1 \vec{\tau}, \quad \text{dove } \vartheta_1 = e^{(P-0) \times \vec{c}^1}.$$

Per la seconda delle (24) è allora

$$\vartheta_1 \text{div } \vec{\tau} + \text{grad } \vartheta_1 \times \vec{\tau} = 0.$$

Ma  $\text{div } \vec{\tau} = 0$ , segue quindi

$$\vec{c}^1 \times \vec{\tau} = 0, \quad (27)$$

relazione caratteristica dello spostamento trasversale.

Dall'essere  $\text{rot } \vec{\tau} = 0$ ,  $\text{rot } \vec{c}^1 \wedge \vec{\tau} = 0$ , ne viene

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{u} &= \vartheta_1 \vec{c}^1 \wedge \vec{\tau}, \\ \text{rot rot } \vec{u} &= \vartheta_1 \vec{c}_1 \wedge (\vec{c}^1 \wedge \vec{\tau}). \end{aligned}$$

Ora

$$\vec{c}^1 \Delta (\vec{c}^1 \Delta \vec{\tau}) = (\vec{c}^1 \times \vec{\tau}) \vec{c}^1 - (\vec{c}^1 \times \vec{c}^1) \vec{\tau};$$

per la (27) è quindi

$$\text{rot rot } \vec{u} = -\vartheta_1 \vec{c}'^2 \vec{\tau}.$$

Dalla seconda delle (25) avremo pertanto

$$\vec{c}^{12} = -p^2/b^2.$$

Anche  $\vec{c}^1$  è quindi vettore immaginario. Potremo scrivere

$$\vec{u} = e^{-kz} \cdot e^{i(m x + n y)} \cdot \vec{\tau}.$$

Analogamente alla (26), avremo

$$k^2 - m^2 - n^2 = -\frac{p^2}{b^2}.$$

La (17) lega, come si è visto, le tensioni elastiche interne agli elementi della deformazione infinitesima, provocata nel mezzo.

Alla superficie limite del mezzo ( $z = 0$ ), tali tensioni dovranno annullarsi:

$$\beta \vec{k} \equiv \lambda \text{div } \vec{s} \vec{k} + 2\mu \frac{d\vec{s}}{dP} \vec{k} - \mu \text{rot } \vec{s} \Delta \vec{k} = 0.$$

Ricordando le espressioni di  $a$  e  $b$ , si trae  $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{a^2 - 2b^2}{b^2}$ . Ponendo tale rapporto uguale a  $q^2$ , avremo

$$q^2 \text{div } \vec{s} \cdot \vec{k} + 2 \frac{d\vec{s}}{dP} \vec{k} - \text{rot } \vec{s} \Delta \vec{k} = 0.$$

Per la (23) e le (24), avremo ancora

$$q^2 \text{div } \vec{s}_1 \cdot \vec{k} + 2 \left( \frac{\partial \vec{s}_1}{\partial z} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \right) - \text{rot } \vec{u} \Delta \vec{k} = 0.$$

Tali relazioni valgono naturalmente sul piano  $z = 0$ , dove  $\vartheta = \vartheta_1$ . Si ha

$$\frac{\partial \vec{s}}{\partial z} = \frac{\partial(\vartheta \vec{c})}{\partial z} = -\vartheta \vec{h} \vec{c}; \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \frac{\partial(\vartheta_1 \vec{\tau})}{\partial z} = -k \vartheta \vec{\tau}.$$

Dalle espressioni di  $\vec{s}_1$  e di  $\vec{u}$  si deduce, evidentemente,

$$\vec{k} \times \vec{c} = -\vec{h}; \quad \vec{k} \times \vec{c}^1 = -\vec{k}. \quad (28)$$

Richiamando le espressioni di  $\text{div } \vec{s}_1$  e  $\text{rot } \vec{u}$ , e dividendo per  $\vartheta$ , avremo

$$q^2 \vec{c}^2 \vec{k} - 2 \vec{h} \vec{c} - 2 \vec{k} \vec{\tau} - (\vec{c}^1 \Delta \vec{\tau}) \Delta \vec{k} = 0. \quad (29)$$

Dalla (29), moltiplicando scalarmente per  $\vec{k}$ , si ottiene

$$q^2 c^2 - 2 h \vec{c} \times \vec{k} - 2 k \vec{\tau} \times \vec{k} = 0,$$

da cui, per le (28),

$$\vec{\tau} \times \vec{k} = \frac{2 h^2 + q^2 c^2}{2 k}. \quad (30)$$

È inoltre

$$(\vec{c}^1 \wedge \vec{\tau}) \wedge \vec{k} = -k \vec{\tau} - (\vec{\tau} \times \vec{k}) c^1; \quad (30')$$

e, per le (28),

$$\vec{c} = -h \vec{k}, \quad c^1 = -k \vec{k}; \quad c^1 - \vec{c} = (h - k) \vec{k}.$$

Perciò, ricordando la (30), dalla (29) si ottiene

$$2 k^2 \vec{\tau} = [2 k q^2 c^2 + (h - k) (2 h^2 + q^2 c^2)] \vec{k} + [2 h + q^2 c^2 - 4 h k] \vec{c}, \quad (31)$$

relazione che esprime il vettore  $\vec{\tau}$  in funzione dei vettori  $\vec{k}$  e  $\vec{c}$  e delle altre grandezze che definiscono il mezzo e il moto.

Moltiplichiamo la (31) internamente per  $\vec{c}^1$ . Per la (27), le (28) e osservando che

$$\begin{aligned} \vec{c} \times \vec{c}^1 &= \vec{c} \times [\vec{c} + \vec{k} (h - k)] \\ &= c^2 - h (h - k), \end{aligned}$$

si perviene alla relazione

$$q^2 c^4 - (2 h^2 + q^2 c^2) (h^2 + k^2) + 4 h k (h^2 - c^2) + 2 h^2 c^2 = 0.$$

Facciamo la posizione

$$f^2 = m^2 + n^2.$$

Consegue allora,

$$h^2 = c^2 + f^2; \quad k^2 = c'^2 + f^2; \quad q^2 = (c'^2 - 2 c^2)/c^2;$$

ciò che consente di ottenere

$$(c'^2 + 2 f^2)^2 = 4 f^2 \sqrt{c^2 + f^2} \sqrt{c'^2 + f^2},$$

da cui, dividendo per  $f^4$  e facendo le posizioni

$$-\frac{c^2}{f^2} = \xi^2; \quad -\frac{c'^2}{f^2} = \xi_1^2,$$

consegue

$$(\xi_1^2 - 2)^4 - 16 (1 - \xi^2) (1 - \xi_1^2) = 0, \quad (32)$$

che è l'equazione di RAYLEIGH.

Ad essa si può dare una forma più significativa, introducendo le velocità delle onde longitudinali  $a$  e trasversali  $b$ , e la velocità  $V_R = \frac{p}{f}$  delle onde di RAYLEIGH. Dalle espressioni di  $c^2$  e  $c'^2$ , risulta infatti

$$\xi^2 = \left(\frac{V_R}{a}\right)^2; \quad \xi_1^2 = \left(\frac{V_R}{b}\right)^2$$

e la (32) diventa

$$\left(\frac{V_R^2}{b^2} - 2\right)^4 - 16 \left(1 - \frac{V_R^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{V_R^2}{b^2}\right) = 0. \quad (33)$$

Sotto tale forma l'equazione di RAYLEIGH si trova comunemente riportata nelle varie trattazioni sull'argomento.

Poichè  $\xi^2 = \frac{b^2}{a^2} \xi_1^2$ , la (32) diviene

$$\xi_1^6 - 8 \xi_1^4 + 8 \left(3 - 2 \frac{b^2}{a^2}\right) \xi_1^2 - 16 \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = 0. \quad (34)$$

Questa equazione ha sempre una radice compresa tra zero e 1.

Quando il modulo di POISSON è uguale a  $1/4$ , risulta  $\lambda = \mu$  e quindi  $\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{3}$ . La (34), fatto  $\xi_1^2 = \zeta$ , diventa:

$$3 \zeta^3 - 24 \zeta^2 + 56 \zeta - 32 = 0,$$

le cui radici sono

$$\zeta_1 = 4, \quad \zeta_2 = 2 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \quad \zeta_3 = 2 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0,8453.$$

Essendo  $p^2/b^2 = \zeta f^2$ , risulta

$$k^2 = f^2 (1 - \zeta), \quad h^2 = f^2 \left(1 - \frac{1}{3} \zeta\right). \quad (35)$$

Valori reali per  $h$  e  $k$  si possono avere solo per valori di  $\zeta$  minori di 1; quindi solo l'ultima radice consente significato fisico. Per essa si ha

$$h = 0.8475 \sqrt{m^2 + n^2}, \quad k = 0.3932 \sqrt{m^2 + n^2}.$$

La velocità di propagazione è

$$V_R = \frac{p}{f} = \sqrt{\zeta_3} b = 0.9194 \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (36)$$

La velocità di propagazione delle onde di RAYLEIGH risulta leggermente inferiore alla velocità delle onde trasversali piane, proprie del mezzo.

Determiniamo ora le espressioni degli spostamenti, in senso orizzontale e in senso verticale, di una particella raggiunta da un'onda di RAYLEIGH. Lo spostamento complessivo in senso verticale sarà dato dalla somma

$$\vec{s}_1 \times \vec{k} + \vec{u} \times \vec{k}.$$

Consideriamo come piano principale il piano  $xz$  ( $y = 0$ ;  $f = m$ ).

Si ha

$$\begin{aligned} \vec{s}_1 \times \vec{k} &= e^{-hz} \cdot e^{i(mz + pt)} \cdot \vec{c} \times \vec{k}; \\ \vec{u} \times \vec{k} &= e^{-kz} \cdot e^{i(mz + pt)} \cdot \vec{\tau} \times \vec{k}. \end{aligned}$$

Per la prima delle (28) e per la (30), consegue

$$(\vec{s}_1 + \vec{u}) \times \vec{k} = \left(-h e^{-hz} + \frac{2h^2 + q^2 c^2}{2k} e^{-kz}\right) e^{i(pt + mx)}. \quad (37)$$



Analogamente, lo spostamento complessivo in senso orizzontale sarà espresso da

$$\begin{aligned} \vec{E} &= (\vec{s}_1 + \vec{u}) \times \vec{i} \\ &= \vec{s}_1 \times \vec{i} + \vec{u} \times \vec{i} \\ &= i m e^{-h z} \cdot e^{i(p t + m x)} + e^{-k z} \cdot e^{i(p t + m x)} \cdot \vec{\tau} \times \vec{i}. \end{aligned}$$

Moltiplichiamo la (29) scalarmente per  $\vec{i}$ . Per la (30) e la (30'), e osservando che  $\vec{c} \times \vec{i} = i m$ ,  $\vec{k} \times \vec{i} = 0$ ,  $\vec{c}^1 \times \vec{i} = i m$ , si ottiene

$$\vec{\tau} \times \vec{i} = i \frac{m}{k} \frac{2 h^2 + q^2 c^2 - 4 h k}{2 k},$$

relazione che si poteva anche trarre immediatamente dalla (31), moltiplicandone entrambi i membri internamente per  $\vec{i}$ .

Avremo pertanto

$$(\vec{s}_1 + \vec{u}) \times \vec{i} = i m \left( e^{-h z} + \frac{2 h^2 + q^2 c^2 - 4 h k}{2 k^2} e^{-k z} \right) e^{i(p t + m x)}.$$

In superficie, per  $z = 0$  e limitatamente alla parte reale (onda progressiva), si ha perciò

$$\begin{cases} (\vec{s}_1 + \vec{u}) \times \vec{k} = h \left( -1 + \frac{2 h^2 + q^2 c^2}{2 h k} \right) \cos(p t + m x) \\ (\vec{s}_1 + \vec{u}) \times \vec{i} = -m \left( 1 + \frac{2 h^2 + q^2 c^2 - 4 h k}{2 k^2} \right) \sin(p t + m x). \end{cases} \quad (38)$$

Esprimiamo i termini tra parentesi nei coefficienti di cos e sin, in funzione della radice dell'equazione di RAYLEIGH, minore dell'unità. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{2 h^2 + q^2 c^2 - 4 h k}{2 k^2} &= \frac{2 - \xi_1^2 - 4 \sqrt{1 - \xi^2} \sqrt{1 - \xi_1^2}}{2(1 - \xi_1^2)} = -0.5773; \\ \frac{2 h^2 + q^2 c^2}{2 h k} &= \frac{2 - \xi_1^2}{2 \sqrt{1 - \xi^2} \sqrt{1 - \xi_1^2}} = 1.7320. \end{aligned}$$

Per  $z = 0$ , è quindi, ricordando che  $h = 0.8475 \cdot f$

$$\begin{aligned} W &= \frac{(\vec{s}_1 + \vec{u}) \times \vec{k}}{f} = 0.6204 \cos(p t + f x); \quad H = \frac{(\vec{s}_1 + \vec{u}) \times \vec{i}}{f} = \\ &= -0.4227 \sin(p t + f x). \end{aligned}$$

Una particella raggiunta da un'onda di RAYLEIGH descrive quindi orbite ellittiche, di equazione

$$\frac{W^2}{(0.6204)^2} + \frac{H^2}{(0.4227)^2} = 1. \quad (39)$$

L'asse verticale di tali orbite è circa una volta e mezza quello orizzontale; precisamente, il primo diviso il secondo dà il numero 1.467.

Per un modulo di POISSON uguale a  $1/4$ , gli spostamenti orizzontali e verticali, destati da un'onda di RAYLEIGH, che obbliga la particella raggiunta secondo un'orbita ellittica, hanno l'espressione generale

$$\frac{\vec{(s_1 + u)} \times \vec{i}}{f} = - (e^{-hz} - 0.5773 e^{-kz}) \sin (pt + f\kappa);$$

$$\frac{\vec{(s_1 + u)} \times \vec{k}}{f} = 0.8475 (-e^{-hz} + 1.7320 e^{-kz}) \cos (pt + f\kappa).$$

Le onde, cui tali spostamenti sono legati, si propagano, come si è visto, con la velocità

$$p/f = 0.9194 \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

### 3. Comportamento delle onde di Rayleigh in un mezzo elastico, firmo-viscoso indefinito.

La teoria di Lord RAYLEIGH diede origine a tutta una serie di lavori sull'argomento, particolarmente notevoli quelli dei giapponesi NAKANO, ARAKAWA e SEZAWA.

Molti geofisici identificarono le onde di RAYLEIGH con le onde costituenti la fase massima di un terremoto. Tre grosse difficoltà però si opponevano a questa identificazione: la costanza del rapporto tra spostamento verticale e quello orizzontale, la costanza della velocità di propagazione delle onde di RAYLEIGH e la persistenza di queste ultime, supposte libere, senza smorzamento. L'una o l'altra delle due prime difficoltà venivano superate in successive teorie, ma il problema non appariva, con ciò, risolto nella sua interezza. Inoltre, i progressi ottenuti, avevano richiesto di considerare la propagazione in un mezzo stratificato.

Tali ricerche si erano limitate a considerare un mezzo puramente elastico. E' noto però che la materia, costituente la Terra, non è esclusivamente elastica: essa presenta, in proporzioni più o meno notevoli, altre caratteristiche, particolarmente sensibile quella derivante dall'azione dell'attrito interno, nota sotto il nome di firmo-viscosità.

Mi sono proposto di vedere a quali conseguenze conduce il considerare l'azione dell'attrito interno, sommata a quella dell'elasticità.

Assieme alle costanti  $\lambda$ ,  $\mu$  di LAMÉ, dovremo introdurre due nuovi coefficienti, espressione dell'attrito interno. Siano essi  $\lambda'$ ,  $\mu'$ : per l'attrito interno di volume ed  $e$  equivoluminale, rispettivamente.

Riprendendo la trattazione con le omografie vettoriali, la (17) assumerà la forma

$$\beta = - \left( \lambda + \lambda' \frac{\partial}{\partial t} \right) \operatorname{div} \vec{s} - 2 \left( \mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{d\vec{s}}{dP} + \left( \mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) \operatorname{rot} \vec{s} \Lambda, \quad (17')$$

mentre l'equazione fondamentale sulla propagazione del moto, si potrà scrivere

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t^2} = \left\{ (\lambda + 2\mu) + (\lambda' + 2\mu') \frac{\partial}{\partial t} \right\} \text{grad div } \vec{s} - \left( \mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) \text{rot rot } \vec{s}, \quad (21')$$

dove si prescinde dall'azione, generalmente trascurabile, della forza  $\vec{F}$ , applicata all'elemento di massa.

Riprendiamo la teoria di RAYLEIGH, con le opportune modifiche, richieste dalla firmo-viscosità del mezzo.

Le analoghe di  $c^2$ ,  $c'^2$  saranno

$$C^2 = - \frac{\rho p^2}{\lambda + 2\mu + i p (\lambda' + 2\mu')}; \quad C'^2 = - \frac{\rho p^2}{\mu + i p \mu'}. \quad (40)$$

Naturalmente, si giunge, anche in questo caso, ad una equazione formalmente identica alla (34), dove però il rapporto  $b^2/a^2$  è ora sostituito dal rapporto  $C^2/C'^2$ .

Posto

$$- C'^2/p^2 = \delta,$$

la (34) diviene

$$\delta^3 - 8 \delta^2 + (24 - 16 \varepsilon) \delta - 16 (1 - \varepsilon) = 0, \quad (41)$$

dove, essendo  $\lambda' = - \frac{2}{3} \mu' [\beta]$ , è

$$\varepsilon = \frac{C^2}{C'^2} = 3 \frac{9 \left( \frac{\mu}{\mu'} \right)^2 + 4 p^2}{81 \left( \frac{\mu}{\mu'} \right)^2 + 16 p^2} + i \frac{15 p \frac{\mu}{\mu'}}{81 \left( \frac{\mu}{\mu'} \right)^2 + 16 p^2}$$

Fatte le ulteriori posizioni

$$\delta = \psi + \frac{8}{3}, \quad \varepsilon = 1 - \frac{j}{16},$$

la (41) si trasforma nell'equazione

$$\psi^3 + \left( j - \frac{40}{3} \right) \psi + \left( \frac{5}{3} j - \frac{448}{27} \right) = 0. \quad (42)$$

La (42), equazione di terzo grado, complessa, è stata risolta per diversi valori del rapporto di  $\frac{\mu}{\mu'}$  e del periodo  $T$  [4].

Si è trovato così che, per  $T \rightarrow \infty$ , qualunque sia il valore del rapporto  $\frac{\mu}{\mu'}$ , i coefficienti dell'immaginario nelle radici dell'equazione della (42) tendono allo zero, mentre le parti reali delle stesse radici tendono ai valori che queste assumono per un mezzo puramente elastico (pag. 428):

$$\zeta_1 \rightarrow 4, \quad \zeta_2 \rightarrow 2 \left( 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right), \quad \zeta_3 \rightarrow 2 \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = 0.8453,$$

dove  $\zeta = \frac{1}{\delta}$ .

Le radici dell'equazione classica di RAYLEIGH, valevoli per un mezzo puramente elastico (caso  $\lambda = \mu$ ), costituiscono il limite cui tendono le radici dell'equazione corrispondente in un mezzo elastico, fimo-viscoso, per periodi tendenti all'infinito, qualunque sia il rapporto  $\mu/\mu'$ .

Per  $T \rightarrow 0$ , qualunque sia il valore di  $\mu/\mu'$ , si ha

$$\zeta_1 \rightarrow 6.1563, \zeta_2 \rightarrow 1.3691, \zeta_3 \rightarrow 0.4746.$$

Mi limito a riportare (tab. I) i valori delle radici  $\delta_3 \left( = \frac{1}{\zeta_3} \right)$ , corrispondenti, nel caso dell'elasticità pura, alle radici minori dell'unità ( $\delta_3 = \delta_3' + i \delta_3''$ ).

Si prova [4] che, per onde progressive, gli spostamenti orizzontale e verticale hanno l'espressione

$$\begin{aligned} H &= \{ R \sin p(t + g x) - S \cos p(t + g x) \} e^{-k_0 x} \\ Z &= \{ -R' \cos p(t + g x) + S' \sin p(t + g x) \} e^{-k_0 x}, \end{aligned} \quad (43)$$

dove  $R, R', S, S'$ , sono costanti che assumono valori diversi a seconda del periodo e dei valori di  $\mu/\mu'$  (la tab. I dà i valori per  $\mu/\mu' = 50 \text{ sec}^{-1}$ ) e  $g$  è determinata

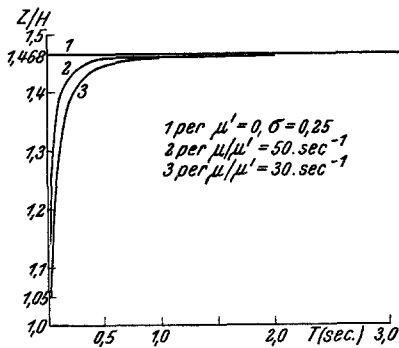


Fig. 1.

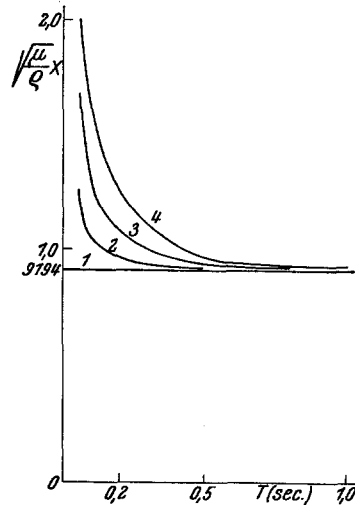


Fig. 2. Velocità onde di RAYLEIGH.

in funzione delle radici della (41), del rapporto  $\mu/\mu'$  e della velocità  $v_s$  delle onde trasversali piane, proprie del mezzo.

Le (43) possono anche scriversi

$$\begin{aligned} H &= A \sin(pt + \omega_1) e^{-k_0 x} \\ Z &= -B \cos(pt + \omega_2) e^{-k_0 x}, \end{aligned} \quad (44)$$

dove

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{R^2 + S^2}; & B &= \sqrt{R'^2 + S'^2}, \\ \text{tang } \omega_1 &= \frac{R \sin \gamma - S \cos \gamma}{R \cos \gamma + S \sin \gamma}; & \text{tang } \omega_2 &= \frac{R' \sin \gamma + S' \cos \gamma}{R' \cos \gamma - S' \sin \gamma}, \end{aligned}$$

essendo

$$\gamma = p g x.$$

Con un'ulteriore trasformazione, ponendo

$$\begin{aligned} X &= H e^{k_0 z}, \\ -Z e^{k_0 z} &= Y, \\ \left. \begin{aligned} \omega_2 &= \omega_1 + \omega; \\ p t + \omega_1 &= \Omega, \end{aligned} \right\} (45) \end{aligned}$$

le (44) si possono scrivere

$$\begin{aligned} X &= A \sin \Omega \\ Y &= B \cos (\Omega + \omega), \end{aligned}$$

da cui, eliminando  $\Omega$  ed elevando a quadrato, si ha

$$\frac{X^2}{A^2} + \frac{2XY}{AB} \sin \omega + \frac{Y^2}{B^2} = \cos^2 \omega. \quad (46)$$

L'ellisse (46) non è riferita ai propri assi.

Per  $\omega = \frac{\pi}{2}$  oppure  $\frac{3}{2}\pi$  l'ellisse si appiattisce in una retta per l'origine: la vibrazione è rettilinea.

Se  $\omega = 0$  oppure  $\pi$ , l'ellisse è riferita ai propri assi.

Gli assi della (46) fanno rispetto ad  $X, Y$  l'angolo  $\vartheta$ , definito da  $\tan 2\vartheta =$

$$= 2 \frac{AB}{B^2 - A^2} \sin \omega. \quad (47)$$

Anche in un mezzo firmo-viscoso, le onde di tipo RAYLEIGH costringono le particelle raggiunte su traiettorie ellittiche; però, a differenza di quanto avviene in un mezzo puramente elastico, tali

Tabella I.  $\mu/\mu' = 50 \text{ sec}^{-1}$ .

$T \text{ sec}$	$\delta_s'$	$\delta_s''$	$R$	$S$	$R'$	$S''$	$v_R$	$k_0$
0	2.10716	0	0.344446	0.0	0.362432	0.0	$\infty$	$\infty$
0.05	1.20188	0.24660	0.440592	0.004866	0.511948	0.112730	$1.687 \cdot v_s$	12.175
0.1	1.18508	0.11377	0.457721	0.021923	0.612425	0.128436	$1.2615 \cdot v_s$	6.4018
0.5	1.18308	0.022155	0.459621	0.004292	0.671762	0.031275	$0.9395 \cdot v_s$	0.4626
1	1.18303	0.011067	0.459681	0.002154	0.674027	0.015735	$0.9245 \cdot v_s$	0.11910
2	1.18302	0.005533	0.459692	0.001086	0.674597	0.007893	$0.9207 \cdot v_s$	0.03250
5	1.18301	0.002213	0.459703	0.000430	0.674762	0.003155	$0.9195 \cdot v_s$	0.00741
10	1.18301	0.001107	0.459703	0.000391	0.674783	0.001584	$0.91945 \cdot v_s$	0.001203
20	1.18301	0.000553	0.459703	0.0000920	0.674789	0.000800	$0.919415 \cdot v_s$	0.000301
40	1.183013	0.000277	0.459703		0.674789		$0.919405 \cdot v_s$	0.0000752
60	1.183013	0.000184					$0.9194 \cdot v_s$	0.0000317
120	1.183013	0.0000922					$0.9194 \cdot v_s$	0.0000083
$\infty$	1.183013	0	0.459701	0.0	0.674790	0.0	$0.9194 \cdot v_s$	0.0

traiettorie non sono riferite ai propri assi. Solo per periodi infinitamente piccoli o infinitamente grandi (per i quali  $\omega \rightarrow 0$ ) le traiettorie ellittiche

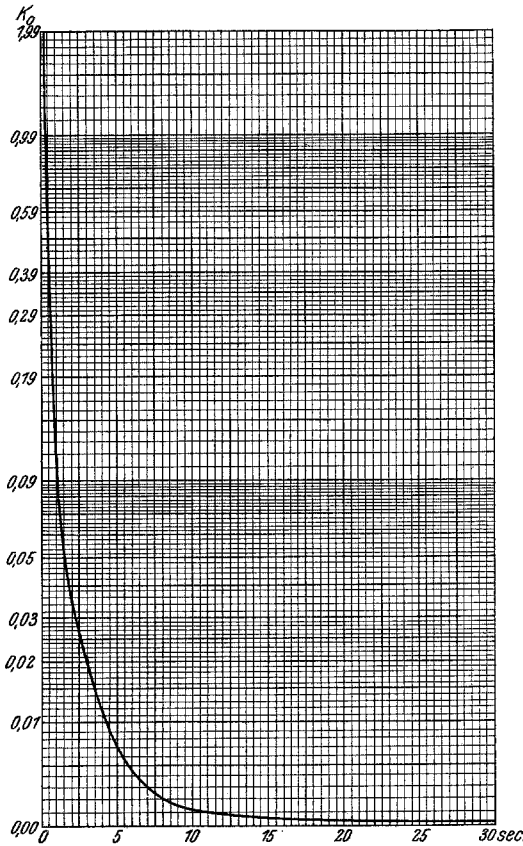


Fig. 3.

tendono a quelle riferite ai propri assi, proprie di un mezzo puramente elastico. Nel caso  $T = \infty$ , la traiettoria coincide con quella richiesta dalla classica teoria di RAYLEIGH, nell'origine del moto.

Per quanto concerne le ampiezze, tenendo conto dei valori di  $A$  e  $B$  si trova che il rapporto dell'ampiezza del movimento verticale a quella del movimento orizzontale, da un valore prossimo all'unità per periodi pressoché nulli, tende rapidamente al valore 1.47, che gli compete nella classica teoria di RAYLEIGH (pag. 429) in mezzi puramente elastici; tanto più rapidamente, quanto maggiore è il rapporto  $\mu/\mu'$ .

In mezzi firmo-viscosi, il rapporto suddetto non è quindi costante (fig. 1).

Passiamo all'effetto dell'attrito interno sulla velocità delle onde di RAYLEIGH. Essa vale

$$v_R = \frac{\sqrt{2} \sqrt{1 + p^2 \left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2}}{\left[ \sqrt{(\delta_3'^2 + \delta_3''^2) \left\{ 1 + p^2 \left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2 \right\}} + \delta_3' + \delta_3'' p \frac{\mu'}{\mu} \right]^{\frac{1}{2}}} \cdot v_s.$$

La tabella I riporta i risultati dei calcoli per il valore 50 del rapporto  $\mu/\mu'$ , al variare del periodo. Ne consegue che, da un valore teoricamente infinito per  $T = 0$ , la velocità delle onde di RAYLEIGH in mezzo elastico, che ammette attrito interno, tende al valore che essa assume in un mezzo puramente elastico col tendere del periodo all'infinito; e tanto più rapidamente quanto maggiore è il valore del rapporto  $\mu/\mu'$ .

L'azione dell'attrito interno si traduce quindi in una sorta di effetto sulla propagazione delle onde superficiali, che si presenta come propagazione anomala (fig. 2).

La firmo-viscosità determina un'azione di smorzamento sulla propagazione delle onde superficiali. Il coefficiente di assorbimento è

$$k_0 = \frac{p}{v_s \sqrt{2} \sqrt{1 + p^2 \left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2}} \cdot \left[ \sqrt{(\delta_3'^2 + \delta_3''^2) \left\{ 1 + p^2 \left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2 \right\}} - \delta_3' - \delta_3'' p \frac{\mu'}{\mu} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

La velocità di propagazione delle onde trasversali spaziali nello strato superficiale terrestre, vale, come è noto, circa 3.3 km/sec. Per un tale valore di  $v_s$  e assegnato a  $\mu/\mu'$  il valore 50, i calcoli hanno fornito, per periodi diversi, i valori riportati nella tabella (fig. 3).

*A periodi nulli corrisponde quindi un assorbimento infinito, il quale resta comunque elevatissimo per piccoli periodi, confermente all'osservazione; per periodi dell'ordine di  $20^s$  e per  $\mu/\mu' = 50$  (che è il valore più prossimo a quelli forniti dall'osservazione), il coefficiente d'assorbimento diviene dell'ordine di 0.0003, che è appunto quello generalmente osservato.*

#### Bibliografia.

1. BURALI-FORTI, R. MARCOLONGO e P. BURGATTI: Analisi vettoriale generale. Vol. I e III. Bologna, 1931.
2. RAYLEIGH, LORD: On waves propagated along the plane surface of an elastic solid. Scientific Papers, II.
3. GUTENBERG, B.: Handbuch der Geophysik, vol. II, p. 552—553 e vol. IV, p. 16—21.  
— Physics of the Earth, vol. VII, p. 361 e 381.
4. CALOI, P.: Comportamento delle onde di RAYLEIGH in un mezzo firmo-elastico indefinito. Ann. Geofis. I, 4 (1948).