

QUALCHE CONSIDERAZIONE PRATICA SULL'ANALISI PERIODALE

C. RAIMONDI - F. MOSETTI

1. *Introduzione.* — Una curva qualunque, oscillante con il tempo, anche se in essa non appare periodicità distinta, può supporre costituita da elementi periodici semplici; può cioè supporre regolata da una espressione del tipo

$$y(t) = \sum_i^k A_i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T_i} (t + \varphi_i) \quad [1]$$

Si tratta di verificare tale supposizione ricercando periodo, ampiezza e fase di oscillazioni la cui risultante sia $y(t)$.

In un caso del genere, l'analisi di Fourier permetterebbe di separare le componenti e determinarne l'ampiezza imponendo però una legge arbitraria e non sempre soddisfatta per i successivi periodi. L'analisi periodale invece, permette di determinare separatamente periodi ed ampiezza, senza imporre alcuna condizione restrittiva per le medesime grandezze. Con l'analisi periodale si ricerca semplicemente l'esistenza di un dato periodo in un certo intervallo, sfruttando a tal uopo combinazioni lineari fra gruppi di ordinate della curva originaria.

Il Vercelli impostò il problema applicando il metodo delle combinazioni lineari simmetriche e presentò altresì un gran numero di schemi di coefficienti ⁽¹⁾ di queste combinazioni atti a selezionare le più svariate periodicità.

Per i casi particolari e principalmente per le previsioni, possono servire, meglio delle combinazioni simmetriche, le combinazioni asimmetriche ed uno di noi ne propose il principio ⁽²⁾.

Riguardo alle combinazioni lineari simmetriche, data la funzione oscillante [1] i vari periodi componenti presenti nella sommatoria si possono selezionare sostituendo ad una qualunque ordinata y_0 una combinazione lineare simmetrica con opportuni coefficienti:

$$Y_0 = 2a_0 y_0 + a_1 (y_{+1} + y_{-1}) + a_2 (y_{+2} + y_{-2}) + \dots + a_m (y_{+m} + y_{-m}) \quad [2]$$

ove con y_p si indica una ordinata distante p unità (della scala arbitraria delle ascisse) a destra (+) od a sinistra (-) di y_0 .

Infatti, sostituendo i valori della [1] col porre successivamente $t_0, t_0 + 1 \dots t_0 + m$, dalla [2] si ottiene, dopo alcuni facili sviluppi, una espressione del tipo

$$Y_0 = 2 \sum_{i=1}^K \left(a_0 + a_1 c s \frac{2\pi}{T_1} + a_2 c s \frac{4\pi}{T_1} + \dots + a_m c s \frac{2m\pi}{T_1} \right) e^{i \dots} \frac{2\pi}{T_1} (t_0 + \varphi_i)$$

che risulta costituita dalle stesse componenti della funzione originaria, rimaste inalterate nel periodo e nella fase e variate solo nell'ampiezza.

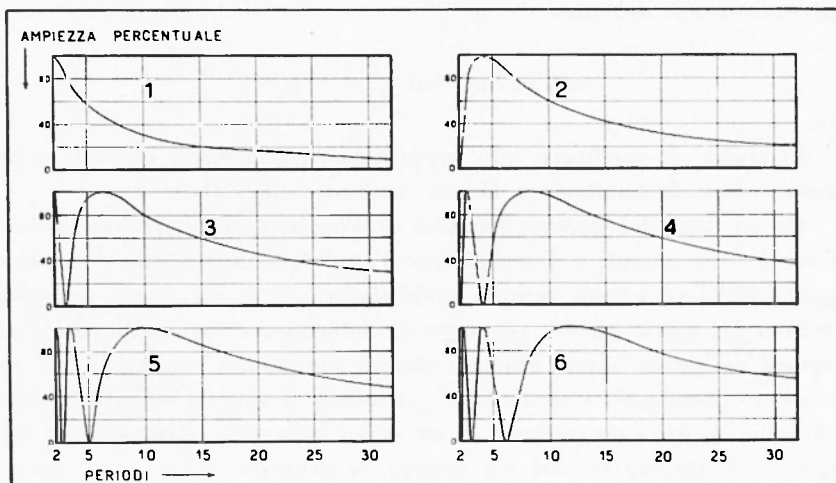


Fig. 1 - Curva di selettività ottenuta per «allargamento» di uno schema di combinazione lineare asimmetrica, corrispondente al prospetto 1

I valori dei fattori di amplificazione dipendono dai periodi T_i e dai coefficienti a_0, a_1, \dots . Potremo quindi imporre l'annullamento di m fattori di amplificazione corrispondenti a periodi arbitrari: avremo quindi un sistema di m equazioni lineari omogenee in $m + 1$ incognite a_0, a_1, \dots, a_m .

Operando in tal modo, non è possibile analizzare una funzione [1] lungo tutto il suo campo di esistenza, bensì soltanto lungo un intervallo interno a questo, di lunghezza $L - 2m$, dove con L si indichi la lunghezza dell'intervallo ove la [1] è definita.

Si è cercato di eliminare, almeno in parte, questo inconveniente, dannoso nel caso delle previsioni, ricorrendo a combinazioni lineari

asimmetriche [2]. Applichiamo alla curva rappresentata dalla [1] la trasformazione

$$y_0 = a_0 y_0 + a_1 y_1 + \dots + a_m y_m$$

in cui y_1, \dots, y_m sono m ordinate a sinistra di y_0 . Procedendo analo-

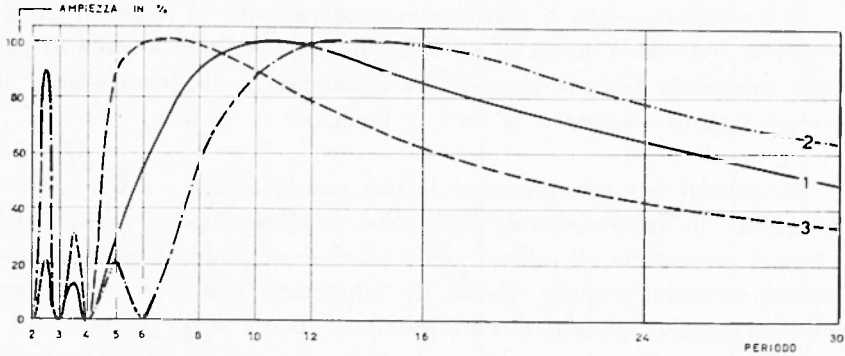


Fig. 2 - Andamento delle curve di selettività per gli schemi di perequazione di cui al prospetto 2

gamente al caso delle combinazioni lineari simmetriche otterremo una espressione:

$$\begin{aligned}
 Y_0 = \sum_1^k A_i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T_i} (t_0 + \varphi_i) & \left(a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{T_i} + a_2 \cos \frac{4\pi}{T_i} + \dots + \right. \\
 + a_m \cos \frac{2m\pi}{T_i} & \left. \right) - \sum_1^k A_i \cos \frac{2\pi}{T_i} (t_0 + \varphi_i) \left(a_1 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T_i} + \right. \\
 + a_2 \operatorname{sen} \frac{4\pi}{T_i} & + \dots + a_m \operatorname{sen} \frac{2m\pi}{T_i} \left. \right) \quad [3]
 \end{aligned}$$

In tale espressione risultano ancora presenti tutte le componenti con i loro svariati periodi T_i , ognuna di esse avrà l'ampiezza alterata della quantità

$$M_i = \sqrt{(M'_i)^2 + (M''_i)^2}$$

ove si è posto $M'_i = a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{T_i} + \dots$

$$M''_i = a_1 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T_i} + \dots$$

e risulterà inoltre sfasata rispetto alla corrispondente oscillazione del diagramma originario della quantità:

$$\text{tang } \theta = - \frac{M''}{M'}$$

Tale ragionamento si può ripetere nel caso che si vogliano considerare m ordinate a destra di y_0 . Volendo ora eliminare n onde di periodo arbitrario bisogna imporre $2n$ condizioni e risolvere quindi il sistema lineare omogeneo in $2n + 1$ incognite.

2. *Schemi per combinazioni lineari asimmetriche.* — Gli schemi considerati in questa seconda parte sono suddivisi in due gruppi; nel primo si presentano gli schemi atti a selezionare onde di breve periodo, nel secondo gruppo, schemi da adoperarsi previa perequazione del diagramma originario, atti a selezionare onde a lungo periodo.

Riguardo alla perequazione ed all'asse medio si presenta conveniente adoperare ancora il metodo delle combinazioni lineari simmetriche, sia per eliminare l'inconveniente dello sfasamento variabile per ogni singola componente, sia perché gli schemi asimmetrici si riducono generalmente, in tal caso, a schemi simmetrici.

Per ottenere schemi atti a selezionare onde a lungo periodo si possono adoperare schemi selezionanti onde brevi previo allargamento dell'intervallo di ascissa. Nel prospetto 1 sono disegnati, ad esempio di ciò, i grafici di selettività di più schemi ottenuti per successivi allargamenti. I massimi e gli zeri dello schema originario si trasportano allo schema allargato secondo un ben determinato multiplo del periodo. Si deve osservare che nell'allargamento varia la selettività del filtro rispetto alle onde brevi, si introducono infatti, per allargamento, nuovi zeri e nuovi massimi risultanti dal fatto che un qualunque schema che si annulla all'infinito si annulla anche nell'onda teorica di periodo 1 e, riguardo ai periodi inferiori ad 1, si annulla per tutti i valori razionali.

Per selezionare onde lunghe si possono usare schemi i quali non annullano il periodo infinito, ma annullano invece un'onda a periodo molto lungo (un qualunque diagramma sarà figurato da n punti o, se continuo, avrà una lunghezza nt).

Caratteristica degli schemi che annullano l'onda di periodo 2 è di esaltare molto, ove non si imponga pure ad essa la condizione di annullamento, l'onda di periodo 2,5. Per ottenere schemi che selezio-

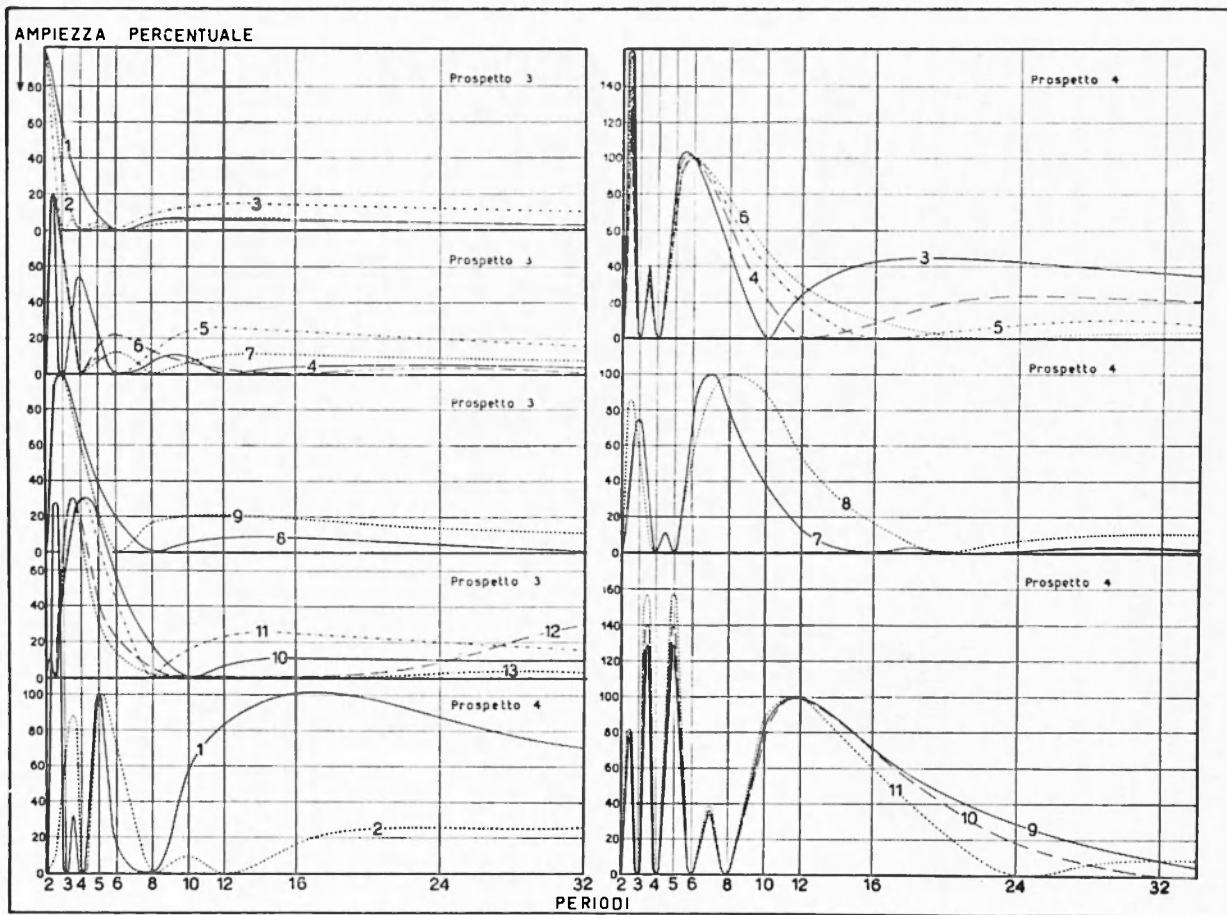


Fig. 3 - Curve di selettività per i vari schemi presentati ai prospetti 3 e 4 corrispondentemente ai valori residui dei prospetti 3 bis e 4 bis

nano l'onda di periodo 4 si possono adoperare schemi annullanti l'onda 2, 2,5 ed una o più onde di periodo superiore ad 8, oppure schemi annullanti 2, 3 ed un periodo successivo al 6. Per ottenere schemi che selezionano onde di periodo 6 è conveniente annullare 2 ; 3 ; 4 ed una onda superiore al 10.

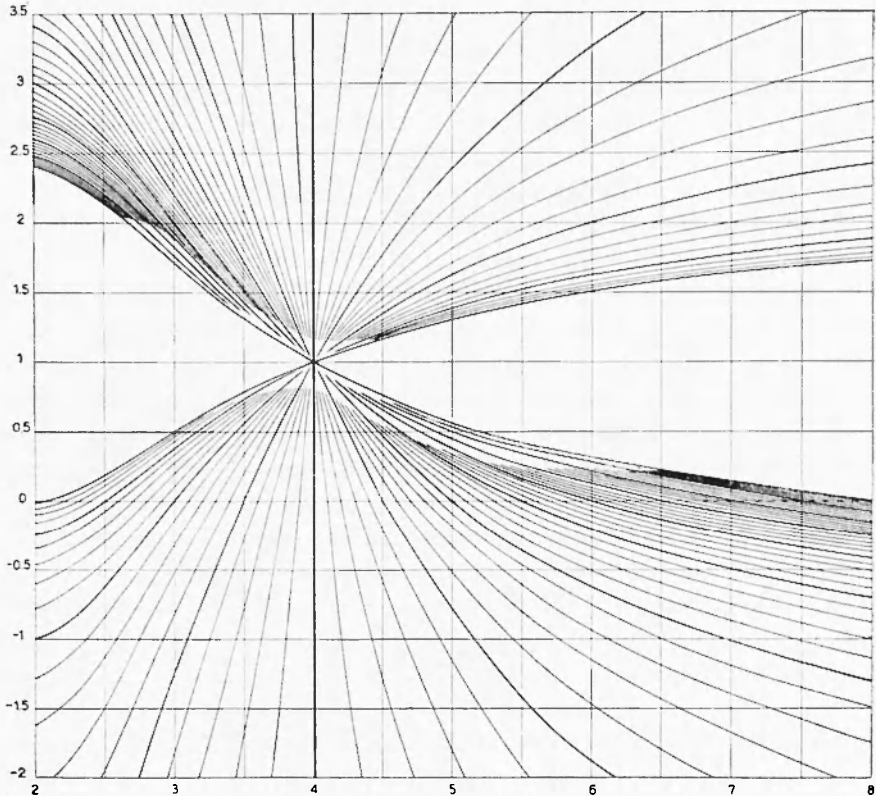


Fig. 4 - Ampiezza in funzione del periodo per gli schemi di separazione « fina » del prospetto 5 (le intersezioni dell'orizzontale di ordinata 0 con la famiglia di curve dà il valore del periodo annullato)

Se consideriamo più filtri annullanti tutti le onde 2 ; 3 ; 4 ; e ciascuno successivamente o 10 o 12 o 16 notiamo che il massimo in 2,5 va aumentando, il filtro perde debolmente in selettività (cioè hanno residui maggiori le onde di periodo prossimo a 6) mentre riduce sempre meglio le onde a periodo lunghissimo.

3. *Schemi per la separazione « fina » di alcune componenti.* — È noto che gli schemi dell'analisi periodale non selezionano un'onda

pura di un ben determinato periodo ma « filtrano » tutte le onde comprese in un certo intervallo; essi si possono infatti assimilare a filtri di « banda » non a filtri di « riga ». Per riuscire ad analizzare ulteriormente le componenti che risultano da una normale applicazione di analisi periodale (che di solito sono rappresentate a lor volta da una somma di 2 o 3 sinusoidi) conviene applicare schemi che annullano una delle periodicità esistenti nella oscillazione definita con la prima selezione. In tal modo risulta, dall'applicazione di questo schema, l'altra componente invariata per periodo e fase. Presentiamo a tale scopo nel prospetto 5 semplici schemi simmetrici atti ad annullare una certa periodicità. La fig. 4 ne rappresenta i residui percentuali.

Istituto Nazionale di Geofisica — Osserv. di Trieste — Aprile 1954.

RIASSUNTO

Si presentano schemi di combinazioni lineari asimmetriche atti alla selezione delle componenti periodiche dei diagrammi empirici.

SUMMARY

We present some tables of linear asymmetrical combinations apted to filtering the periodical components in the empirical diagrams.

BIBLIOGRAFIA

(¹) VERCELLI F.: *Analisi periodale* (nota in memoria a cura di F. Mosetti). *Tecnica Italiana*, IX, n. 2, 1954.

(²) MOSETTI F.: *Su un metodo di analisi delle periodicità*. «*Annali di Geofisica*», in corso di stampa.

PROSPETTO N. 1. - Allargamento

Numero progressivo	Coefficienti dei fattori di amplificazione										Residui in % per i vari periodi													
	a ₀	a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	a ₅	a ₆	a ₇	a ₈		2	2 1/2	3	3 1/2	4	5	6	8	10	12	16	24	32	∞
1	1/2	-1/2							a ₈		100	95	87	78	70	58	50	38	31	26	20	13	9	0
2	1/2	0	-1/2						a ₈		0	59	87	97	100	96	87	71	59	50	39	26	20	0
3	1/2	0	0	-1/2					a ₈		100	59	0	43	71	96	100	93	81	71	55	39	28	0
4	1/2	0	0	0	-1/2				a ₈		0	96	87	43	0	59	87	100	96	87	71	50	38	0
5	1/2	0	0	0	0	-1/2			a ₈		100	0	87	97	71	0	50	93	100	97	83	61	47	0
6	1/2	0	0	0	0	0	-1/2		a ₈		0	85	0	62	100	60	0	70	95	100	92	72	55	0

PROSPETTO N. 2. - Schemi per eventuali perequazioni

Numero progressivo	Coefficienti dei fattori di amplificazione								
	a ₀	a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	a ₅	a ₆	a ₇	a ₈
1	+ 0,062	+ 0,162	+ 0,224	+ 0,162		- 0,162	- 0,224	- 0,162	- 0,062
2	+ 0,288		+ 0,288				- 0,288		- 0,288
3	+ 0,288	+ 0,288		- 0,288	- 0,288				

Numero progressivo periodo	Residui in % e sfasamenti in gradi													
	2	2½	3	3½	4	5	6	8	10	12	16	24	32	∞
1	0	0	0	7	0	27 162°	56 30°	91 90°	100 126°	99 150°	86 0°	65 150°	49 45°	0
2	0	89	0	13	0	21	0	58 90°	89 126°	100 150°	99 0°	79 30°	63 45°	0
3	0	21	0	31	58 90°	89 126°	100 150°	99 0°	90 18°	79 30°	63 45°	44	33	0

PROSPETTO N. 3. - *Schemi per selezionare onde di breve periodo*

Periodo delle onde da selezionare	Num.ro progressivo	Coefficienti dei fattori di amplificazione								
		a ₀	a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	a ₅	a ₆	a ₇	a ₈
2	1	$+\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$					
	2	$+\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{12}$			
	3	$+\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$	$+\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$	
$2\frac{1}{2}$	4	+ 0,157	- 0,271	+ 0,157				- 0,157	+ 0,271	- 0,157
	5	+ 0,2	- 0,2	+ 0,2		- 0,2	+ 0,2	- 0,2		
	6	+ 0,151	- 0,280	+ 0,151		- 0,151	+ 0,280	- 0,151		
	7	+ 0,174	- 0,246	+ 0,174		- 0,174	+ 0,246	- 0,174		
	8	+ 0,239	- 0,338		+ 0,338	- 0,239				
3	9	+ 0,288	- 0,288		+ 0,288	- 0,288				
	10	+ 0,190		- 0,308		+ 0,308		- 0,190		
4	11	+ 0,218	+ 0,044	- 0,281		+ 0,281	- 0,044	- 0,218		
	12	+ 0,909	- 1,684	- 0,562	+ 2,725		- 2,725	- 0,562	- 1,684	- 0,909
	13	+ 0,111	- 0,158	- 0,069	+ 0,255		- 0,255	+ 0,069	+ 0,158	- 0,111

PROSPETTO N. 3 bis

Numero progressivo	Residui in % e sfasamenti in gradi di onde con periodo:													
	2	2½	3	3½	4	5	6	8	10	12	16	24	32	∞
1	100 0°	83 54°	58 90°	38 64°	24 135°	8 163°	0	5	6	5	5	—	3	0
2	100 0°	67 90°	29 150°	8	0	2	0	3	5	6	5	—	3	0
3	100 0°	38 90°	0 150°	6 14°	0	4	0	9	11	16	14	12	9	0
4	0	100	0	34	54	21	0	7	9	0	4	—	4	0
5	0	100 18°	70 90°	33 138°	0	9	0	12	24	26	24	—	14	0
6	0	100 18°	75 90°	36 148°	0	15	22	13	7	3	0	3	1	0
7	0	100 18°	73 90°	35 148°	0	16	12	0	7	10	11	—	7	0
8	0	85 162°	100 30°	87 64°	68 90°	36 64°	18 30°	0	6	7	8	—	1	0
9	0	89 162°	100 30°	81 64°	58 90°	22 126°	0	17	21	21	19	14	11	0
10	0	0	54 90°	84 138°	100 0°	89 47°	54 90°	17 135°	0	7	11	10	9	0
11	0	0	57 90°	85 138°	100 0°	76 52°	41 90°	0	17	23	25	0,21	17	0
12	0	0	73 150°	100 143°	88 90°	41 159°	22 30°	4 90°	0	0,3	0	9	29	0
13	0	0	75 150°	100 128°	81 90°	40 27°	13 30°	0	0	0	2,6	3	2,8	0

PROSPETTO N. 4. - *Schemi per selezionare onde a lungo periodo (previa perequazione)*

Periodo delle onde da selezionare	Numero progressivo	Coefficienti dei fattori di amplificazione												
		a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_{10}	a_{12}	a_{14}	a_{16}
5	1	+ 0,578	- 0,240	+ 0,339	- 0,240		+ 0,240	- 0,339	+ 0,240	- 0,578				
	2	+ 0,201		- 0,201		+ 0,201				- 0,201	+ 0,201	- 0,201		
6	3	+ 0,471	- 0,291	+ 0,180	- 0,291		+ 0,291	- 0,180	+ 0,291	- 0,471				
	4	+ 0,400	- 0,292	+ 0,108	- 0,292		+ 0,292	- 0,108	+ 0,292	- 0,400				
	5	+ 0,340	- 0,288	+ 0,051	- 0,288		+ 0,288	- 0,051	+ 0,288	- 0,340				
	6	+ 0,310	- 0,289	+ 0,021	- 0,289		+ 0,289	- 0,021	+ 0,289	- 0,310				
	7	+ 0,111		- 0,158		- 0,069		+ 0,255			- 0,255	+ 0,069	+ 0,158	- 0,111
8	+ 0,190				- 0,308				+ 0,308		- 0,190			
12	9	+ 0,310		- 0,289		+ 0,021		- 0,289			+ 0,289	- 0,021	+ 0,289	- 0,310
	10	+ 0,340		- 0,288		+ 0,051		- 0,288			+ 0,288	- 0,051	+ 0,288	- 0,340
	11	+ 0,400		- 0,292		+ 0,108		- 0,292			+ 0,292	- 0,108	+ 0,292	- 0,400

PROSPETTO N. 4 bis

Numero progressivo	Residui in % e sfasamenti in gradi													
	2	2½	3	3½	4	5	6	8	10	12	16	24	32	∞
1	0	208	0	32	0	100	14	0	60	84	102	88	71	0
2	0	9	70	88	0	100	72° 70° 90°	0	126° 9	150° 0	0° 17	30° 25	45° 26	0
3	0	159	0	41	0	90	100	47	0	25	43	43	37	0
4	0	157	0	39	0	85	100	62	22	0	9	24	22	0
5	0	139	0	36	0	80	100	71	39	19	0	8	9	0
6	0	127	0	34	0	82	100	77	48	29	10	0	4	0
7	0	38	75	31	0	154° 0	30° 75	81	126° 40	30° 13	0	0	2	0
8	0	85	54	10	0	0	54	100	89	54	17	7	11	0
9	0	77	0	129	0	129	0	0	82	100	72	29	10	0
10	0	79	0	140	0	139	0	0	80	100	71	19	0	0
11	0	81	0	157	0	157	0	0	85	100	62	0	9	0

PROSPETTO N. 5. - *Schemi per la separazione «fina» delle componenti da gruppi risultanti di due periodicità (combinazioni simmetriche del tipo $a y_{-t} + 2 y_0 + a y_{+t}$)*

Periodo annullato	a	Periodo annullato	a
1,8	+ 1,064	5	— 3,236
1,9	+ 1,014	5,1	— 3,006
2	+ 1,000	5,2	— 2,818
2,1	+ 1,014	5,3	— 2,660
2,2	+ 1,042	5,4	— 2,523
2,3	+ 1,090	5,5	— 2,407
2,4	+ 1,154	5,6	— 2,304
2,5	+ 1,236	5,7	— 2,214
2,6	+ 1,336	5,8	— 2,134
2,7	+ 1,458	5,9	— 2,063
2,8	+ 1,604	6	— 2,000
2,9	+ 1,783	6,1	— 1,948
3	+ 2,000	6,2	— 1,890
3,1	+ 2,272	6,3	— 1,843
3,2	+ 2,613	6,4	— 1,800
3,3	+ 3,059	6,5	— 1,760
3,4	+ 3,659	6,6	— 1,723
3,5	+ 4,498	6,7	— 1,690
3,6	+ 5,760	6,8	— 1,659
3,7	+ 7,893	6,9	— 1,630
3,8	+12,165	7	— 1,604
3,9	+24,938	7,1	— 1,579
4,1	—26,110	7,2	— 1,556
4,2	—13,333	7,3	— 1,534
4,3	— 9,141	7,4	— 1,513
4,4	— 7,012	7,5	— 1,495
4,5	— 5,760	7,6	— 1,476
4,6	— 4,912	7,7	— 1,460
4,7	— 4,310	7,8	— 1,443
4,8	— 3,864	7,9	— 1,428
4,9	— 3,511	8	— 1,414