

Le sesse del lago di Como

Parte I

P. CALOI - M. C. SPADEA

1. - Come applicazione delle teorie sulle oscillazioni libere dei laghi esposte precedentemente (1), saranno studiate le sesse ordinarie del lago di Como o Lario.

Ecco i principali elementi morfometrici del lago di Como.

Altezza sul livello del mare	m	198
Profondità massima	m	414
Larghezza massima	m	4400
Larghezza media	m	1940

A Bellagio il lago si divide in due rami meridionali.

Per ottenere i dati necessari al calcolo della curva normale abbiamo usato la carta batimetrica del lago alla scala di 1:50.000, tratta dall'Atlante dei laghi italiani della Casa De Agostini.

L'equidistanza delle curve batimetriche è di m 25, tra una isobata e l'altra sono inoltre segnati molti punti con profondità intermedie.

In questo lavoro è stato trascurato il ramo sud-ovest del lago; quello che, dalla linea d'acqua di minima profondità che unisce Menaggio alla Punta Spartivento, raggiunge Como.

Sono state praticate 42 sezioni normali alla linea di valle, fra l'estremo Nord e l'estremo Sud (Lecco).

2. - È noto che la prima rigorosa teoria idrodinamica sulle sesse è dovuta a Chrystal. Per le ipotesi che sono a fondamento di questa teoria, oltre che ai lavori originali, rimandiamo alla prima parte del citato lavoro sul lago di Garda (1). Qui ci limitiamo a riportare l'equazione, che di Chrystal porta

il nome, e che regge il moto libero (sesse) dei laghi:

$$\sigma(x) \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{4\pi^2}{gT^2} u = 0 \quad [1]$$

dove u si ritiene rappresentabile mediante la somma di una serie di semplici funzioni armoniche di t .

Questa teoria mostra che quando la larghezza e la forma della sezione trasversale di un lago varia con la profondità, purché non in modo brusco, si può procedere ai calcoli introducendo due variabili, σ e x . σ è il prodotto dell'area $S(x)$ di una sezione trasversale per la larghezza $b(x)$ di detta sezione alla superficie del lago, mentre x è l'area della superficie del lago fra la traccia in superficie della sezione trasversale corrispondente a σ , e un'altra linea similare, scelta come riferimento. Noi conteremo le x a partire da un estremo (l'estremo Sud) del lago.

Secondo Chrystal quindi lo studio delle oscillazioni di un lago può essere fatto ritenendo retta la linea mediana del lago in superficie, uniforme la sua larghezza, rettangolare una sua generica sezione trasversale, sì che la sezione longitudinale del lago risulterà limitata da una curva i cui punti hanno per ascissa e ordinata rispettivamente x e σ . È questa la curva normale del lago. Ne risulta che x è la distanza misurata lungo la linea mediana del lago ridotto e σ è la profondità nel punto x .

I valori ottenuti per le varie grandezze che rientrano nel calcolo:

x , $S(x)$, $b(x)$, $r(x)$, $\sigma(x)$, sono riportate nella tabella I.

La curva normale (vedi fig. 1) ha forma così complessa da render ardua, se non im-

possibile, l'integrazione dell'equazione di Chrystal [1], per mezzo dei metodi suggeriti dallo stesso. Ci siamo serviti perciò del metodo dell'integrazione numerica della [1] suggerito da Hidaka tenendo presenti le condizioni agli estremi corrispondenti a $z = 0, z = 1$.

3. - Metodo di Hidaka. La teoria di questo metodo è stata esposta e, in parte

ampliata nel primo lavoro sulle sesse del Garda (1). Posto $z = \frac{v}{a}$, dove a è l'area totale del lago, Hidaka (2) scrive la [1] sotto la forma

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{\lambda}{\sigma(z)} u = 0, \tag{2}$$

con le condizioni ai limiti

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \tag{3}$$

T a b e l l a I

Sez.	x $10^3 \cdot m$	$S(x)$ $10^2 \cdot m^2$	$b(x)$ $10^2 \cdot m$	$V(x)$ sing. $10^3 \cdot m^2$	Vx compless. $10^3 \cdot m^2$	(x) $10 \cdot m^3$
0	0,375	0	0	0	0	0
1	1,375	235	11	500	500	25,85
2	2,375	1525	25,55	2150	2650	389,64
3	3,375	2965	30,75	3275	5925	911,74
4	4,375	2680	26,25	3475	9400	703,50
5	5,375	2595	20,75	2475	11875	538,46
6	6,375	5325	42,50	3750	15625	2263,12
7	7,375	3325	33,25	4250	19875	1105,56
8	8,375	3990	22	3025	22900	877,80
9	9,375	4730	27,50	3400	26300	130,75
10	10,375	5635	31,75	3575	29875	1789,11
11	11,375	5070	28,50	3300	33175	1444,95
12	12,375	4340	26,50	2675	35850	1150,10
13	13,375	2800	18	2500	38350	504,00
14	14,375	2605	20,25	1800	40150	527,51
15	15,375	7530	33,50	3100	43250	2522,55
16	16,375	7490	34,50	3750	47000	2584,05
17	17,375	9010	37	3725	50725	3333,70
18	18,375	9330	34,25	3500	54225	3195,52
19	19,375	9505	37,50	4175	58400	3564,37
20	20,375	8170	33,50	4100	62500	2736,95
21	21,375	7760	30,75	3500	66000	2386,20
22	22,375	5915	23,50	3000	69000	1390,03
23	23,375	4400	20	2475	71475	880,00
24	24,375	4100	19,50	2150	73625	799,50
25	25,375	5110	24,50	2475	76100	1398,95
26	26,375	4170	26	2450	78550	1084,20
27	27,375	2925	23,75	2750	81300	694,69
28	28,375	2810	20	2275	83575	562,00
29	29,375	2790	19,75	2125	85700	551,02
30	30,375	2585	22,25	2250	87950	575,16
31	31,375	1945	18,25	2225	90175	354,96
32	32,375	1065	14,75	1950	92125	157,09
33	33,375	1420	16,50	1725	93850	234,30
34	34,375	1870	16,50	1925	95775	308,55
35	35,375	1275	12	1600	97375	153,00
36	36,375	1440	13,50	1325	98700	194,40
37	37,375	1805	14,25	1650	100350	257,21
38	38,375	1325	11,75	1375	101725	155,69
39	39,375	1355	12,75	1250	102975	172,76
40	40,375	985	13,75	1350	104325	135,44
41	41,375	500	8	1225	105550	40,00
42	42,375	0	0	825	106375	0,00

e dove

$$\lambda = \frac{4 \pi^2}{T^2} \frac{a^2}{g} \quad [4]$$

Hidaka prova che l'integrazione della [2], soggetta alle condizioni [3], è equivalente alla ricerca del minimo valore dell'integrale.

$$I(u) = \int_0^1 \left\{ \left(\frac{du}{dz} \right)^2 - \frac{\lambda}{\sigma(z)} u^2 \right\} dz,$$

dove

$$I_n = \int_0^1 \frac{z^2 (1-z)^2 \cdot z^n}{\sigma(z)} dz. \quad [7]$$

Per il calcolo dell'integrale [7] Hidaka dà un procedimento che, permettendo di esprimere analiticamente $\sigma(z)$, consente una rapida integrazione. Ma, nel nostro caso, la curva normale è così complicata, da dover

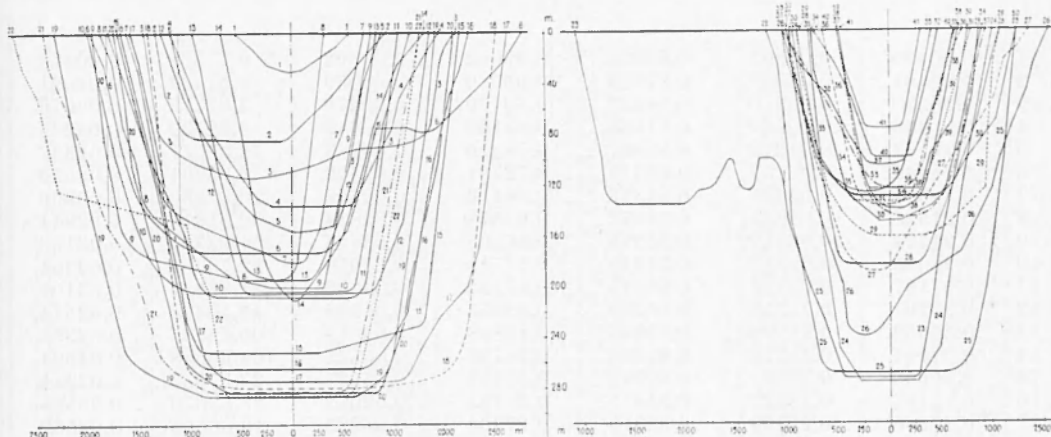


Fig. 1

dove u può scriversi

$$u = \sum_0^m A_i z (1-z)^{z^i}. \quad [5]$$

L'eliminazione delle $m + 1$ costanti A_0, A_1, \dots, A_m , conduce alla equazione dei periodi, che si ottiene annullando il determinante dei coefficienti di A_0, A_1, \dots, A_m nelle equazioni:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{3} - I_0 \lambda \right) A_0 + \left(\frac{1}{6} - I_1 \lambda \right) A_1 + \\ & + \left(\frac{1}{10} - I_2 \lambda \right) A_2 + \dots = 0 \\ & \left(\frac{1}{6} - I_1 \lambda \right) A_0 + \left(\frac{2}{15} - I_2 \lambda \right) A_1 + \\ & + \left(\frac{1}{10} - I_3 \lambda \right) A_2 + \dots = 0 \\ & \left(\frac{1}{10} - I_2 \lambda \right) A_0 + \left(\frac{1}{10} - I_3 \lambda \right) A_1 + \\ & + \left(\frac{3}{35} - I_4 \lambda \right) A_2 + \dots = 0 \\ & \dots \end{aligned} \quad [6]$$

ricorrere all'integrazione numerica, tenendo presenti le condizioni agli estremi corrispondenti a $z = 0, z = 1$.

Ci siamo limitati al caso $m = 2$. Come risulta dalla tabella III, il calcolo ha dato per gli integrali i seguenti risultati:

$$\begin{aligned} I_0 &= 40,6125848; & I_1 &= 19,8444314; \\ I_2 &= 12,0871103; & I_3 &= 8,4690561; \\ & & I_4 &= 6,4270210 \end{aligned} \quad [7a]$$

4. - *Periodi*: Nel caso $m = 1$ l'equazione dei periodi è:

$$\begin{aligned} (I_0 I_2 - I_1^2) \lambda^2 - \left(\frac{2}{15} I_0 - \frac{1}{3} I_1 + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} I_2 \right) \lambda + \frac{1}{10} = 0 \end{aligned} \quad [8]$$

Tenendo conto dei valori di I_0, I_1, \dots la [8] diventa:

$$970873344 \lambda^2 - 28292376 \lambda + 166667 = 0$$

Tabella II

Sez.	$z = \frac{V}{a}$	z^2	$1 - z$	$(1 - z)^2$	$z^2(1 - z)^2$	$\frac{z^2(1 - z)^2}{\sigma(x) 10^{-6}}$	Az
1	0,00470	0,00002	0,99930	0,99062	0,00002	0,77369	0,00470
2	0,02491	0,00002	0,97509	0,95080	0,00059	0,51422	0,02021
3	0,05570	0,00310	0,94430	0,89170	0,00276	3,02718	0,03079
4	0,08836	0,00781	0,91164	0,83109	0,00649	9,22530	0,03266
5	0,11163	0,01246	0,88837	0,78920	0,00983	18,25577	0,02327
6	0,14688	0,02157	0,85312	0,72781	0,01569	6,93291	0,03525
7	0,18684	0,03491	0,81316	0,66116	0,02308	20,87630	0,03996
8	0,21528	0,04634	0,78472	0,61578	0,02854	32,51310	0,02844
9	0,24724	0,06113	0,75276	0,56665	0,03464	264,93307	0,03196
10	0,28085	0,07887	0,71915	0,51718	0,04079	22,79904	0,03361
11	0,31187	0,09726	0,68813	0,47352	0,04605	31,86961	0,03102
12	0,33701	0,11358	0,66299	0,43955	0,04992	43,40492	0,02514
13	0,36052	0,12998	0,63948	0,40893	0,05315	105,45635	0,02351
14	0,37744	0,14246	0,62256	0,38758	0,05522	104,68048	0,04694
15	0,40658	0,16531	0,59342	0,35215	0,05821	23,07585	0,02914
16	0,44183	0,19521	0,55817	0,31155	0,06082	23,53670	0,03525
17	0,47685	0,22739	0,52315	0,27368	0,06223	18,66695	0,03502
18	0,50975	0,25984	0,49025	0,24034	0,06245	19,54299	0,03290
19	0,54900	0,30140	0,45100	0,20340	0,06131	17,20080	0,03925
20	0,58754	0,34520	0,41246	0,17012	0,05873	21,45819	0,03854
21	0,62045	0,38496	0,37955	0,14406	0,05873	23,24197	0,03291
22	0,64855	0,42075	0,35135	0,12345	0,05194	37,36610	0,02830
23	0,67191	0,45146	0,32809	0,10764	0,04860	55,22727	0,02326
24	0,69213	0,47904	0,30787	0,09478	0,04540	56,78549	0,02022
25	0,71539	0,51178	0,28461	0,08100	0,04145	29,62936	0,02326
26	0,73842	0,54526	0,26158	0,06842	0,03731	34,41247	0,02303
27	0,76428	0,58412	0,23572	0,05556	0,03245	46,71148	0,02586
28	0,78566	0,61726	0,21434	0,04594	0,02836	50,46263	0,02138
29	0,80564	0,64905	0,19436	0,03778	0,02452	44,49929	0,01998
30	0,82679	0,68358	0,17321	0,03000	0,02051	35,65964	0,02115
31	0,84771	0,71861	0,15229	0,02319	0,01166	46,93486	0,02092
32	0,86604	0,75002	0,13396	0,01794	0,01345	85,61971	0,01833
33	0,88226	0,77838	0,11774	0,01386	0,01079	46,15277	0,01622
34	0,90035	0,81063	0,09965	0,00993	0,00805	26,08977	0,01809
35	0,91539	0,83794	0,08461	0,00846	0,00716	39,21568	0,01504
36	0,92785	0,86090	0,07215	0,00521	0,00449	23,09671	0,01246
37	0,94336	0,88993	0,05664	0,00321	0,00286	11,11932	0,01551
38	0,95628	0,91447	0,04372	0,00191	0,00175	11,24028	0,01292
39	0,96804	0,93710	0,03196	0,00102	0,00096	5,55684	0,01176
40	0,98073	0,96183	0,01927	0,00037	0,00036	2,65800	0,01263
41	0,99224	0,98454	0,00776	0,00006	0,00005	1,47500	0,01151
42	1,00000	1,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00776

Tabella II (Sequilo)

Sez.	$M = \frac{z^2(1-Z)\Delta z}{\sigma(z)10^{-2}}$	Mz	Mz^2	Mz^3	Mz^4
1	0,36363	0,00171	0,000008	0,00000	0,00000
2	3,06024	0,07623	0,00190	0,00005	0,00001
3	9,32069	0,51916	0,02892	0,00161	0,00009
4	30,12983	2,66227	0,23524	0,02078	0,00184
5	42,48118	4,74217	0,52937	0,05909	0,00659
6	24,43851	3,58953	0,52723	0,07744	0,01137
7	83,42169	15,58651	2,91218	0,54411	0,10166
8	92,46726	19,90635	4,28544	0,92257	0,19859
9	846,72609	209,34456	51,75835	12,79673	3,16399
10	76,62757	21,52085	6,04413	1,69749	0,47670
11	98,85953	30,83132	9,61536	2,99874	0,93519
12	109,11997	36,77452	12,39338	4,17669	1,40764
13	247,92788	89,38296	32,22434	11,61752	4,18852
14	491,37017	185,46276	70,00106	26,42120	9,97235
15	67,24303	27,33967	11,11576	4,51944	1,83755
16	82,96687	36,65725	16,19627	7,15600	3,16168
17	65,37166	31,17247	14,86459	7,08818	3,38006
18	64,29644	32,77511	16,70711	8,51645	4,34117
19	67,51314	37,06471	20,34852	11,17134	6,13304
20	82,69986	48,58947	28,54826	16,77324	9,85486
21	76,48932	47,45780	29,44519	18,26927	11,33522
22	105,78606	68,59218	44,49232	28,85994	18,72014
23	128,45863	86,31264	57,99433	38,96697	26,18212
24	114,82026	79,47054	55,00394	38,06988	26,34909
25	68,91789	49,30317	35,27099	25,23251	18,05099
26	79,25192	58,52120	43,21322	31,90951	23,56244
27	120,79589	92,32188	70,55977	53,92742	41,21537
28	107,88910	84,76415	66,59580	52,32166	41,10692
29	88,90958	71,62911	57,70728	46,49129	37,45491
30	75,42014	62,35662	51,55583	42,62584	35,24253
31	98,18773	83,23472	70,55890	59,81348	50,70433
32	156,94093	135,91712	117,70966	101,94127	88,28460
33	74,69646	65,90170	58,14243	51,29674	45,25690
34	47,19639	42,49327	38,25881	34,44631	31,01374
35	58,98038	53,99005	49,42195	45,24035	41,41263
36	28,77850	26,70213	24,77557	22,98801	21,32929
37	17,24606	16,26924	15,34775	14,47845	13,65842
38	14,52244	13,88752	13,28036	12,69974	12,14491
39	6,53484	6,32598	6,12380	5,92808	5,73861
40	3,37300	3,30800	3,24425	3,18173	3,12042
41	1,69772	1,68454	1,67147	1,65849	1,64563
42	0	0	0	0	0
	4061,25848	1984,44314	1208,71103	846,90561	642,70210

Da cui:

$$\lambda_1 = 0,0081960 \quad \lambda_2 = 0,0209451.$$

La superficie del lago è:

$$a = 10637,50 \text{ hm}^2. \quad e \quad g = 9,807 \text{ m/sec}$$

Data l'unità prescelta (M), si ha per le sesse uninodali e binodali rispettivamente:

$$T_1 = 39^m 18^s \quad T_2 = 24^m 35^s$$

I periodi delle tre sesse, quante ne consente di determinare il caso $m = 2$, conseguono dalla equazione,

$$\begin{aligned} & (I_0 I_2 I_1 - I_0^2 I_3 - I_1^2 I_4 + 2 I_1 I_2 I_3 - I_2^3) \lambda^3 - \\ & - \left[\frac{3}{35} (I_0 I_2 - I_1^2) + \frac{1}{5} (-I_0 I_3 + I_1 I_2 + \right. \\ & + I_1 I_3) + \frac{2}{15} I_0 I_4 + \frac{1}{3} (-I_1 I_4 - I_2^2 + I_2 I_3 + \\ & + I_2 I_4 - I_3^2) \left. \right] \lambda^2 + \left(\frac{1}{700} I_0 - \frac{3}{350} \bar{r}_1 + \right. \\ & + \frac{53}{2100} \bar{r}_2 - \frac{1}{30} \bar{r}_3 + \frac{1}{60} I_4 \left. \right) \lambda - \frac{1}{10500} = 0 \end{aligned} \quad [9]$$

che deriva dalla [6], eliminando le costanti A_0, A_1, A_2 .

Tenendo conto dei valori di I_0, \dots, I_4 , la [9] diventa

$$\begin{aligned} & 79494222\lambda^3 - 8147989\lambda^2 + \\ & + 1779580\lambda - 952,38 = 0 \end{aligned}$$

che risolta dà per λ i valori:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0,00810718; \quad \lambda_2 = 0,019736; \\ \lambda_3 &= 0,0746547. \end{aligned}$$

I periodi per le sesse uninodali, binodali, trinodali, saranno rispettivamente:

$$T_1 = 39^m 30^s \quad T_2 = 25^m 19^s \quad T_3 = 33^m 1^s.$$

Nodi. La determinazione delle linee nodali delle oscillazioni libere si ha mediante l'annullamento di $\frac{du}{dz}$.

Occorre dunque determinare prima l'espressione di u .

Per $m = 2$ i valori dei rapporti $\frac{A_1}{A_0}$, $\frac{A_2}{A_1}$

conseguono da una coppia delle tre equazioni:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{3} - I_0 \lambda \right) A_0 + \left(\frac{1}{6} - I_1 \lambda \right) A_1 + \\ & + \left(\frac{1}{10} - I_2 \lambda \right) A_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{6} - I_1 \lambda \right) A_0 + \left(\frac{2}{15} - I_2 \lambda \right) A_1 + \\ & + \left(\frac{1}{10} - I_3 \lambda \right) A_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{10} - I_2 \lambda \right) A_0 + \left(\frac{1}{10} - I_3 \lambda \right) A_1 + \\ & + \left(\frac{3}{35} - I_4 \lambda \right) A_2 = 0. \end{aligned}$$

Ci serviremo, per esempio, delle equazioni:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{3} - I_0 \lambda + \left(\frac{1}{6} - I_1 \lambda \right) \frac{A_1}{A_0} + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{10} - I_2 \lambda \right) \frac{A_2}{A_0} \right) = 0 \\ \left(\frac{1}{10} - I_2 \lambda + \left(\frac{1}{10} - I_3 \lambda \right) \frac{A_1}{A_0} + \right. \\ \left. + \left(\frac{3}{35} - I_4 \lambda \right) \frac{A_2}{A_0} \right) = 0. \end{cases} \quad [10]$$

Poichè per la sessa uninodale $\lambda = 0,00810718$ con i valori di I_0, I_1, I_2, I_3, I_4 , che figurano nelle [7a], risolvendo si ha:

$$\frac{A_1}{A_0} = -1,0118485 \quad \frac{A_2}{A_0} = +0,8831617.$$

Per $m = 2$ è:

$$u = A_0 z (1 - z) \left(1 + \frac{A_1}{A_0} z + \frac{A_2}{A_0} z^2 \right),$$

da cui derivando rispetto a z e ricordando che nei nodi $\frac{du}{dz} = 0$, si ha:

$$\begin{aligned} & 4 \frac{A_2}{A_0} z^3 + 3 \left(\frac{A_1}{A_0} - \frac{A_2}{A_0} \right) z^2 + \\ & + 2 \left(1 - \frac{A_1}{A_0} \right) z - 1 = 0. \end{aligned} \quad [11]$$

Con i valori già calcolati di $\frac{A_1}{A_0}$ e $\frac{A_2}{A_0}$ avremo

$$\begin{aligned} & 3,5326468 z^3 - 5,6850306 z^2 + \\ & + 4,0236970 z - 1 = 0. \end{aligned}$$

Delle tre radici di questa equazione una sola è compresa tra 0 e 1, (valori entro i quali può variare z); essa è:

$${}_1z_1 = 0,16798$$

L'uninodo corrisponde, quindi come risulta dalla Tabella II, alla sezione trasversale 16,747 e si trova a Km. 17,122 dall'estremo Nord del lago.

Il valore di λ corrispondente alla sessa binodale è:

$$\lambda = 0,019736; \text{ la [10] dà perciò,}$$

$$\frac{A_1}{A_0} = + 1,2128716 \quad \frac{A_2}{A_0} = - 5,3487244$$

per cui la [11] diviene:

$$21,3948976 z^3 - 19,6847880 z^2 + 0,4257432 z + 1 = 0.$$

Delle tre radici di questa equazione, una è negativa, le altre sono:

$${}_2z_1 = 0,2881859 \quad {}_2z_2 = 0,827822.$$

Le linee nodali della sessa binodale corrispondono perciò alle sezioni trasversali 10,236 per il binodo Nord e 30,049 per il binodo Sud, che distano dall'estremo Nord rispettivamente Km 10,611 e Km 30,424.

La sessa trinodale, finalmente, corrisponde a $\lambda = 0,0746547$.

Dalla [10] otteniamo:

$$\frac{A_1}{A_0} = - 4,607241 \quad \frac{A_2}{A_0} = + 4,186492.$$

La [11] allora diviene:

$$16,745968 z^3 - 26,381199 z^2 + 11,214482 z - 1 = 0,$$

le cui radici sono:

$${}_3z_1 = 0,12093 \quad {}_3z_2 = 0,539988 \quad {}_3z_3 = 0,914457.$$

Le linee nodali, dunque, corrispondono alle sezioni trasversali 5,264 per il trinodo Nord; 18,770 per il trinodo medio; 34,938 per il trinodo Sud e le rispettive distanze dall'estremo Nord sono: Km. 5,639; Km. 19,145 e Km. 35,313.

Tabella III

Sez.	UNI -	BI -	TRI -	Sez.	UNI -	BI -	TRI -
	N O D A L E				N O D A L E		
	η_1	η_2	η_3		η_1	η_2	η_3
0	- 1	+ 1	- 1	22	+ 0,18213	- 1,16713	- 0,25533
1	- 0,98121	+ 1,00161	- 0,94782	23	+ 0,20859	- 1,11089	- 0,29421
2	- 0,90324	+ 0,99873	- 0,73674	24	+ 0,23273	- 1,04148	- 0,32351
3	- 0,79289	+ 0,96630	- 0,45424	25	+ 0,26238	- 0,93656	- 0,34757
4	- 0,68643	+ 0,89865	- 0,20357	26	+ 0,29371	- 0,80467	- 0,36118
5	- 0,61677	+ 0,83201	- 0,05333	27	+ 0,33148	- 0,62155	- 0,36286
6	- 0,52041	+ 0,70571	+ 0,13119	28	+ 0,36544	- 0,44052	- 0,35223
7	- 0,42363	+ 0,53189	+ 0,28357	29	+ 0,39905	- 0,24602	- 0,33143
8	- 0,36198	+ 0,39290	+ 0,35881	30	+ 0,43720	- 0,01223	- 0,29720
9	- 0,29929	+ 0,22528	+ 0,41308	31	+ 0,47555	+ 0,24841	- 0,24997
10	- 0,24007	+ 0,04094	+ 0,43983	32	+ 0,51522	+ 0,50171	- 0,19695
11	- 0,19091	- 0,13281	+ 0,43957	33	+ 0,55324	+ 0,74595	- 0,14048
12	- 0,15421	- 0,27337	+ 0,42671	34	+ 0,59258	+ 1,04134	- 0,06638
13	- 0,12277	- 0,40256	+ 0,39873	35	+ 0,62921	+ 1,30577	+ 0,00458
14	- 0,10123	- 0,49320	+ 0,37496	36	+ 0,66097	+ 1,53384	+ 0,07029
15	- 0,06640	- 0,64300	+ 0,32404	37	+ 0,70224	+ 1,84499	+ 0,16044
16	- 0,02729	- 0,80727	+ 0,24935	38	+ 0,73824	+ 2,11558	+ 0,24355
17	+ 0,00903	- 0,95326	+ 0,16458	39	+ 0,77230	+ 2,37392	+ 0,32534
18	+ 0,04178	- 1,07107	+ 0,07974	40	+ 0,81046	+ 2,66592	+ 0,42061
19	+ 0,08007	- 1,39281	- 0,02362	41	+ 0,84635	+ 2,94271	+ 0,51325
20	+ 0,11810	- 1,20576	- 0,12144	42	+ 0,87130	+ 3,13584	+ 0,57925
21	+ 0,15176	- 1,20356	- 0,19795				

DISTRIBUZIONE DELLE AMPIEZZE

Le ampiezze sono date dalla formula:

$$\zeta = - \frac{du}{dz} a.$$

Nel caso $m = 2$ si ha:

$$\zeta = A_0 a \left\{ 4 \frac{A_2}{A_0} z^3 + 3 \left(\frac{A_1}{A_0} - \frac{A_2}{A_0} \right) z^2 + \right. \\ \left. + 2 \left(1 - \frac{A_1}{A_0} \right) z - 1 \right\}.$$

Per la sessa uninodeale del lago di Como avremo:

$$\zeta = A_0 a \{ 3,5326 z^3 - 5,6850 z^2 + 4,0237 z - 1 \}$$

per la binodale:

$$\zeta = A_0 a \{ 21,3949 z^3 - 19,6848 z^2 - 0,4257 z - 1 \}$$

per la trinodale:

$$\zeta = A_0 a \{ 16,7459 z^3 - 26,3812 z^2 + 11,2145 z - 1 \}.$$

Facendo variare z nelle tre precedenti equazioni, si ha l'andamento dell'ampiezza per le tre sesse considerate.

I risultati del calcolo sono contenuti nella Tabella III, dove $\eta = \frac{\zeta}{a A_0}$.

Ci riserviamo di riprendere la ricerca con altri metodi che consentono di considerare il bacino lacustre nella sua interezza.

RIASSUNTO

Data la particolare configurazione del Lago di Como, poichè il ramo di Lecco si presenta come una naturale continuazione della parte superiore del Lago, abbiamo ritenuto che l'insieme costituisca un bacino con movimenti propri, sia pure influenzato dal ramo che fa capo a Como.

In questa prima parte delle ricerche concernenti le oscillazioni libere di questo caratteristico Lago, ci siamo limitati alla determinazione dei periodi, dei nodi e delle ampiezze che ci si devono aspettare fra Gera e Lecco.

Naturalmente le ricerche verranno poi estese all'intero bacino.

ABSTRACT

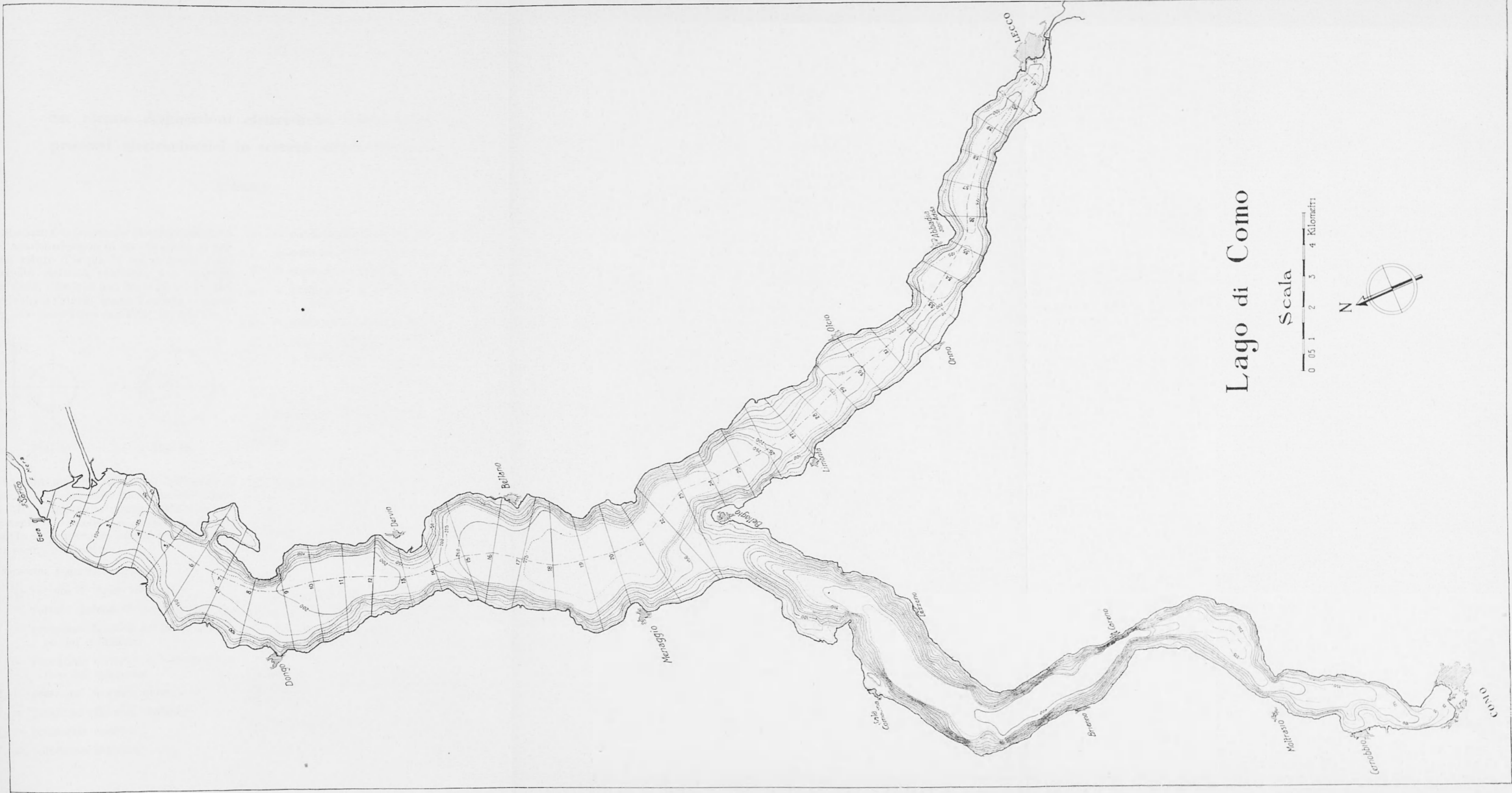
In view of the particular configuration of Lake Como and as the Lecco Branch appears to be a natural continuation of the upper part of the Lake, we have viewed its ensemble as a basin with movements of its own even if influenced by the branch which begins at Como.

During the present initial stage of research concerning the free oscillations of this interesting Lake, we have limited ourselves to the determination of periods, knots and amplitudes that should be expected between Gera and Lecco.

Naturally, the research will subsequently be extended to the whole basin.

BIBLIOGRAFIA

- (1) CALOI P., *Le sesse del lago di Garda*. Parte I, «Annali di Geofisica» 1948.



Lago di Como

Scala
0 0.5 1 2 3 4 Kilometri

